

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) Миша живет за городом и каждый раз, когда он собирается в гости к своим друзьям, которые живут в городе, ему предстоит непростое путешествие.

От дома Миши в город ведет трасса длиной 8192 метров, для простоты будем считать ее прямой. Также на трассе есть несколько автобусных остановок, первая из которых находится рядом с домом Миши, будем считать, что до нее расстояние 1 метр. Так получилось, что остановка с номером i (при $i > 1$) удалена от дома Миши на $1 + 3 \cdot i$ метров.

Больше, чем ходить пешком, Миша любит для текущей своей позиции считать сумму кратчайших расстояний до всех остановок, назовем эту величину крутостью.

Мы же попросим вас сделать чуть больше, посчитайте суммарную крутость по всем целым координатам Миши на трассе.

Задание 2. (35 баллов) Перестановкой чисел от 1 до n будем называть упорядоченное множество из n элементов, в котором каждое из чисел от 1 до n встречается ровно один раз. Индексацию элементов перестановки будем начинать с 1.

Назовём перестановку P *интересной*, если для неё существует два таких индекса её элементов $i_{first} < i_{second}$, что одновременно выполняются три условия

- для $1 \leq i < i_{first}$ верно, что $P_i < P_{i+1}$
- для $i_{first} \leq i < i_{second}$ верно, что $P_i > P_{i+1}$
- для $i_{second} \leq i < n$ верно, что $P_i < P_{i+1}$

Найдите количество *интересных* перестановок чисел от 1 до n .

Задание 3. (40 баллов) Обозначим за $f(n)$ функцию, которая равна количеству натуральных чисел меньших n взаимно простых с ним.

Обозначим за $f_k(n)$ функцию, которая при $k = 1$ равна $f(n)$, а иначе $f_k(n) = f_{k-1}(n)$.

За $f^*(n)$ обозначим функцию, равную первому значению k при таком n , что $f_k(n) = 0$.

Покажите, что для любого натурального X найдётся такое N_X , что для любого $n > N_X$ верно, что $f^*(n) > X$.