

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

**Задание 1.** (25 баллов) Миша живет за городом и каждый раз, когда он собирается в гости к своим друзьям, которые живут в городе, ему предстоит непростое путешествие.

От дома Миши в город ведет трасса длиной 8192 метров, для простоты будем считать ее прямой. Также на трассе есть несколько автобусных остановок, первая из которых находится рядом с домом Миши, будем считать, что до нее расстояние 1 метр. Так получилось, что остановка с номером  $i$  (при  $i > 1$ ) удалена от дома Миши на  $1 + 3 \cdot i$  метров.

Больше, чем ходить пешком, Миша любит для текущей своей позиции считать сумму кратчайших расстояний до всех остановок, назовем эту величину крутостью.

Мы же попросим вас сделать чуть больше, посчитайте суммарную крутость по всем целым координатам Миши на трассе.

**Задание 2.** (35 баллов) Обозначим за  $f(n)$  функцию, которая равна количеству натуральных чисел меньших  $n$  взаимно простых с ним.

Обозначим за  $f_k(n)$  функцию, которая при  $k = 1$  равна  $f(n)$ , а иначе  $f_k(n) = f_{k-1}(n)$ .

За  $f^*(n)$  обозначим функцию, равную первому значению  $k$  при таком  $n$ , что  $f_k(n) = 0$ .

Покажите, что для любого натурального  $X$  найдётся такое  $N_X$ , что для любого  $n > N_X$  верно, что  $f^*(n) > X$ .

**Задание 3.** (40 баллов) Одним музыкальным сервисом пользуется  $n$  человек. Всего в этом сервисе есть  $m$  различных песен.

У каждого пользователя есть плейлист с понравившимися ему песнями.

Каждый пользователь может зайти в плейлист к другому пользователю. Назовем такой процесс *ознакомлением*. Все пользователи считают себя настоящими ценителями музыки, поэтому если во время такого *ознакомления* с другим плейлистом они видят, что какая-то песня, которая нравится им, встречается в плейлисте у другого пользователя, то она перестает им нравится. Но при этом им начинают нравиться песни, которые не нравились им, но нравились человеку, плейлист которого они сейчас смотрят. Назовем *похожестью* двух пользователей количество совпадающих песен в их плейлистах.

Какая максимальная *похожесть* по всем парам людей может быть достигнута после произвольного количества таких *ознакомлений*?