

11 класс

Задание 1. (20 баллов)

Какие различные тройки неотрицательных целых чисел (x, y, z) удовлетворяют всем следующим условиям:

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 19528$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 31945$$

$$x \& (y \oplus z) = 19548$$

$$x \oplus (y \mid z) = 12417$$

если дополнительно известно, что на каждое число выделяется 2 байта памяти.

В качестве ответа запишите количество подходящих различных троек.

*(в данной задаче используются битовые операции: $\sim$ инверсия, $\&$ И, $\mid$ ИЛИ, $\oplus$ исключающее ИЛИ)

РЕШЕНИЕ:

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 19528 \quad (1)$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 31945 \quad (2)$$

$$x \& (y \oplus z) = 19548 \quad (3)$$

$$x \oplus (y \mid z) = 12417 \quad (4)$$

$$19528 = 0100110001001000_2$$

$$31945 = 0111110011001001_2$$

$$19548 = 0100110001011100_2$$

$$12417 = 0011000010000001_2$$

Обратим внимание, что значения некоторых битов совпадают, тогда можно рассмотреть только 4 случая:

1 случай (рассмотрим 1, 7, 8, 11 и 15 биты):

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 0 \quad (1.1)$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 0 \quad (2.1)$$

$$x \& (y \oplus z) = 0 \quad (3.1)$$

$$x \oplus (y \mid z) = 0 \quad (4.1)$$

Тогда (1.1) можно расписать:

$$\sim x \& z = 0 \quad (1.1.1)$$

$$x \& y = 0 \quad (1.1.2)$$

Пусть $x = 1$, подставим в (1.1.2), получим $1 \& y = 0$, следовательно $y = 0$. Тогда получаем $\sim z \& (1 \mid 0) = 0$ (2.1) из чего можно сделать вывод, что $\sim z = 0$, тогда $z = 1$. Но тогда уравнение (3.1) неверное $1 \& (0 \oplus 1) \neq 0$, получили противоречие, значит изначальное предположение, что $x = 1$, было неверным.

Тогда получаем, что $x = 0$, проанализируем (1.1.1) и заметим, что $z = 0$. Рассмотрим $1 \& (0 \mid y) = 0$ (2.1), следовательно $y = 0$. Проверяем все условия:

$$1 \& 0 = 0 \quad (1.1.1)$$

$$0 \& y = 0 \quad (1.1.2)$$

$$1 \& (0 \mid 0) = 0 \quad (2.1)$$

$$0 \& (0 \oplus 0) = 0 \quad (3.1)$$

$$0 \oplus (0 \mid 0) = 0 \quad (4.1)$$

Противоречий нет, тогда делаем вывод о том, что получилось однозначно определить значения на 1, 7, 8, 11 и 15 битах: $x = y = z = 0$

Получили (знак ? – неизвестный бит):

$$x = 0?????00??0???0?_2$$

$$y = 0?????00??0???0?_2$$

$$z = 0?????00??0???0?_2$$

2 случай (рассмотрим 2, 5, 6, 10 и 13 биты):

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 1 \quad (1.2)$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 1 \quad (2.2)$$

$$x \& (y \oplus z) = 1 \quad (3.2)$$

$$x \oplus (y \mid z) = 0 \quad (4.2)$$

Тогда можно расписать два условия (1.2) и (2.2):

$$\sim z = 1 \quad (2.2.1)$$

$$x \mid y = 1 \quad (2.2.2)$$

$$x = 1 \quad (3.2.1)$$

$$y \oplus z = 1 \quad (3.2.2)$$

Получаем, что $z = 0$, а $x = 1$. Подставим полученные значения в (1.2): $(0 \& 0) \mid (1 \& y) = 1$, значит $y = 1$. Проверим:

$$(0 \& 0) \mid (1 \& 1) = 1 \quad (1.2)$$

$$1 \& (1 \mid 1) = 1 \quad (2.2)$$

$$1 \& (1 \oplus 0) = 1 \quad (3.2)$$

$$1 \oplus (1 \mid 0) = 0 \quad (4.2)$$

Противоречий нет, тогда делаем вывод о том, что получилось однозначно определить значения на 2, 5, 6, 10 и 13 битах: $x = y = 1$, $z = 0$.

Получили (знак ? – неизвестный бит):

$$x = 01??1100?10?1?0?_2$$

$$y = 01??1100?10?1?0?_2$$

$$z = 00??0000?00?0?0?_2$$

3 случай (рассмотрим 12 и 14 биты):

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 0 \quad (1.3)$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 0 \quad (2.3)$$

$$x \& (y \oplus z) = 1 \quad (3.3)$$

$$x \oplus (y \mid z) = 0 \quad (4.3)$$

Можно расписать подробнее на случаи условия (1.3) и (3.3):

$$\sim x \& z = 0 \quad (1.3.1)$$

$$x \& y = 0 \quad (1.3.2)$$

$$x = 1 \quad (3.3.1)$$

$$y \oplus z = 1 \quad (3.3.2)$$

Получаем, что $x = 1$, а из (1.3.2) можно сделать вывод, что $y = 0$, тогда из (3.3.2) $z = 1$. Проверим все условия:

$$(0 \& 1) \mid (1 \& 0) = 0 \quad (1.3)$$

$$0 \& (1 \mid 0) = 0 \quad (2.3)$$

$$1 \& (0 \oplus 1) = 1 \quad (3.3)$$

$$1 \oplus (0 \mid 1) = 0 \quad (4.3)$$

Противоречий нет, тогда делаем вывод о том, что получилось однозначно определить значения на 12 и 14 битах: $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

Получили (знак ? – неизвестный бит):

$$x = 01??1100?101110?_2$$

$$y = 01??1100?100100?_2$$

$$z = 00??0000?001010?_2$$

4 случай (3, 4, 9 и 16 биты):

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 0 \quad (1.4)$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 1 \quad (2.4)$$

$$x \& (y \oplus z) = 0 \quad (3.4)$$

$$x \oplus (y \mid z) = 1 \quad (4.4)$$

Можно расписать (1.4) и (2.4):

$$\sim x \& z = 0 \quad (1.4.1)$$

$$x \& y = 0 \quad (1.4.2)$$

$$\sim z = 1 \quad (2.4.1)$$

$$x \mid y = 1 \quad (2.4.2)$$

Проанализируем (2.4.1), тогда получим, что $z = 0$. Подставим в (4.4) $x \oplus (y \mid 0) = 1$, тогда оно преобразуется в $x \oplus y = 1$, а это означает, что значение y всегда не равно x , следовательно оно однозначно определяется как $y = \sim x$, подставим во все условия:

$$(\sim x \& 0) \mid (x \& \sim x) = 0 \quad (1.4)$$

$$1 \& (x \mid \sim x) = 1 \quad (2.4)$$

$$x \& (\sim x \oplus 0) = 0 \quad (3.4)$$

$$x \oplus (\sim x \mid 0) = 1 \quad (4.4)$$

Обратим внимание, что уравнение (1.4) всегда истинно так как $\sim x \& 0 = 0$ и $x \& \sim x = 0$, аналогично с (2.4), так как $x \mid \sim x = 1$, а значит $1 \& (x \mid \sim x)$ всегда истинно.

Пусть $x = 0$:

$$(3.4) 0 \& (\sim 0 \oplus 0) = 0 \& 1 = 0 \text{ верно}$$

$$(4.4) 0 \oplus (\sim 0 \mid 0) = 0 \oplus 1 = 1 \text{ верно}$$

Тогда при $x = 0$, $y = 1$ и $z = 0$.

Пусть $x = 1$:

$$(3.4) 1 \& (\sim 1 \oplus 0) = 1 \& 0 = 0 \text{ верно}$$

$$(4.4) 1 \oplus (\sim 1 \mid 0) = 1 \oplus 0 = 1 \text{ верно}$$

Тогда при $x = 1$, $y = 0$ и $z = 0$.

Получили (знак ? – неизвестный бит):

$$x = 01??1100?101110?_2$$

$$y = 01??1100?100100?_2$$

$$z = 0000000000010100_2$$

Получается, что остается только 4 бита для перебора 0 и 1 у переменной x , так как переменная y найдется однозначно из значения x . Значит ответ $2^4 = 16$.

РЕШЕНИЕ (2 вариант):

Для каждого числа отведено 1 байт = 8 бит памяти, значит в двоичной системе счисления необходимо рассматривать числа длины 8.

$$19528 = 0100110001001000_2$$

$$31945 = 0111110011001001_2$$

$$19548 = 0100110001011100_2$$

$$12417 = 0011000010000001_2$$

Введем обозначения:

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 0100110001001000 \quad (1)$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 0111110011001001 \quad (2)$$

$$x \& (y \oplus z) = 0100110001011100 \quad (3)$$

$$x \oplus (y \mid z) = 0011000010000001 \quad (4)$$

Рассмотрим таблицу истинности для данных выражений:

Номер строки	x	y	z	(1)	(2)	(3)	(4)	Кол-во повторений
1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	1	1	0	0	1	2
3	0	1	0	0	1	0	1	2
4	0	1	1	1	0	0	1	2
5	1	0	0	0	1	0	1	2
6	1	0	1	0	0	1	0	1
7	1	1	0	1	1	1	0	1
8	1	1	1	1	0	0	0	1

В последнем столбце указано количество повторений для значений (1)-(4), значит, если встречается строка 1001 или 0101, тогда будет 2 варианта для значений переменных x , y , z , а во всех остальных случаях – единственное решение.

Осталось сопоставить значения строк первой таблицы и вычислить значения переменных:

(1)	(2)	(3)	(4)	x	y	z	Номер строки в 1 таблице
-----	-----	-----	-----	---	---	---	--------------------------

0	0	0	0				1
1	1	1	0				7
0	1	0	1				3, 5
0	1	0	1				3, 5
1	1	1	0				7
1	1	1	0				7
0	0	0	0				1
0	0	0	0				1
0	1	0	1				3, 5
1	1	1	0				7
0	0	0	0				1
0	0	1	0				6
1	1	1	0				7
0	0	1	0				6
0	0	0	0				1
0	1	0	1				3, 5

Тогда получаем, что на 4х позициях по два варианта, ответ $2^4 = 16$.

ОТВЕТ:

16

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Доказали в каких битах каждой переменной может быть два варианта значения	17 баллов
Верно соотнесли значения каждого бита с таблицей	15 баллов
Правильно использовали логические операции и указали определения 1-8, возможное добавление частичных баллов за объяснение не всех пунктов	11 баллов
Правильно составлена таблица истинности для исходной системы	6 баллов
Правильно перевели числа в 2 систему счисления	1 балл
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 2. (20 баллов)

Рассмотрим все пары целых чисел A и B , таких что $0 \leq A, B < 1024$.

Требуется подсчитать количество различных пар (A, B) , таких что сумма A и B в двоичной системе счисления записывается ровно 10 битами (с ведущими нулями, если нужно) и является палиндромом. Пары (B, A) и (A, B) считаются одинаковыми.

РЕШЕНИЕ:

Количество способов представить число K в виде суммы двух неотрицательных чисел равно $K + 1$. Тогда ответ – это сумма всех палиндромов + количество палиндромов.

Количество палиндромов длины N в двоичной системе счисления:

$$2^{(N+1)/2} = 2^5 = 32.$$

Теперь будем фиксировать в палиндроме i -ый бит равный 1, тогда просто перебираем на 1 бит меньше, то есть получаем $2^{(N+1)/2 - 1} = 2^4 = 16$ палиндромов.

Каждый разряд, равный 1 вносит в итоговую сумму 2^i . Тогда для всех разрядов получаем $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{N-1} = 2^N - 1 = 1023$. Следовательно итоговая сумма $1023 * 16 = 16368$.

Осталось прибавить количество палиндромов $16368 + 32 = 16400$.

Остается учесть случай четной суммы, так как только она не считается два раза, четной суммы столько же вариантов, сколько количество палиндромов, которые оканчиваются на 0 (начинаются на 0), а это 16 (как ранее посчитано), $16400 + 16 = 16416$.

Теперь каждая пара посчитана два раза, следовательно ответ: $16416 / 2 = 8208$.

ОТВЕТ:

8208

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Получили неверный ответ из-за арифметической ошибки	18 баллов
Вывели формулу для подсчета количества пар чисел (общую или отдельно для четных/нечетных)	10 баллов
Указано, что количество способов представить число K в виде суммы двух неотрицательных чисел это $K+1$	+2 балла
Написано, что необходимо искать сумму всех палиндромов + количество.	+2 балла
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 3. (20 баллов)

Стрелка Пирса – логическая операция, которая дает истину, только если оба операнда ложны. На письме обозначается как $\downarrow$. Дано логическое высказывание $(a \wedge b) \vee (a \rightarrow c)$, выразите его используя только стрелку Пирса и скобки.

a	b	$a \downarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Таблица истинности для стрелки Пирса

РЕШЕНИЕ:

Распишем:

$$(a \wedge b) \vee (a \rightarrow c) = (a \wedge b) \vee \text{not}(a) \vee c = \text{not}(a) \vee b \vee c.$$

a	b	c	$\text{not}(a) \vee b \vee c$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Тогда необходимо получить связь с логическим **ИЛИ** и стрелкой Пирса:

a	b	$a \downarrow b$	$a \downarrow b$	$(a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)$	$a \vee b$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

Получаем: $(a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b) = a \vee b$.

Остается выразить отрицание через стрелку Пирса:

a	$\text{not}(a)$	$a \downarrow a$
0	1	1

0	1	1
1	0	0
1	0	0

Получаем: $a \downarrow a = \text{not}(a)$.

Тогда:

$$\text{not}(a) \vee b = ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b)$$

$$(\text{not}(a) \vee b) \vee c = (((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow c) \downarrow (((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow c)$$

ОТВЕТ (один из возможных):

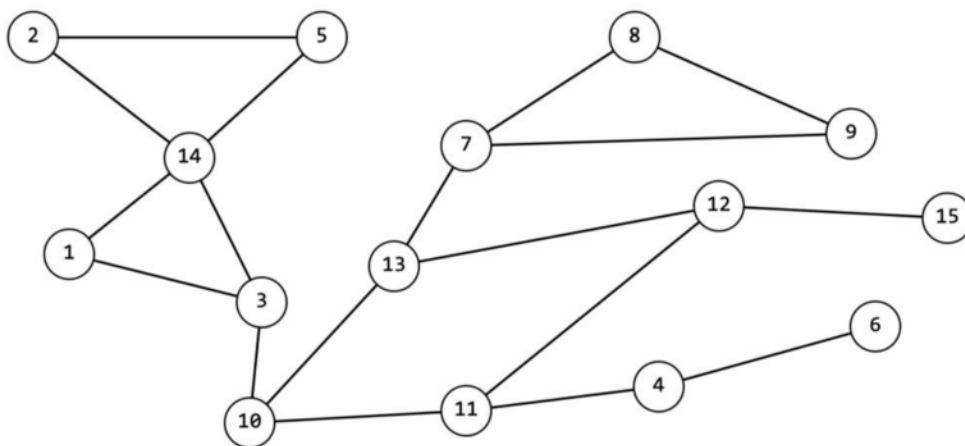
$$(((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow c) \downarrow (((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow c)$$

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Формула неверная из-за неправильного расположения скобок	18 баллов
Доказан переход от логического И, ИЛИ к выражению только с использованием стрелки Пирса	+5 баллов (за каждое)
выражение упрощено до $\text{not}(a) \vee b \vee c$ или подобного	+3 балла
Выписали верную формулу, но доказательств недостаточно	7 баллов
Формула верная, но осталось логическое отрицание	5 баллов
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 4. (20 баллов)

Маршрутом будем называть последовательность различных ребер графа, где каждые два соседних ребра имеют общую вершину. Дан связный неориентированный граф, необходимо доказать, что в графе не существует маршрута по всем ребрам или предоставить его, если существует.



РЕШЕНИЕ (1 вариант):

Дадим несколько определений:

Бамбук – это граф, который состоит из одного простого пути.

Простой путь – это путь, в котором каждая вершина один раз встречается (далее будем писать просто путь).

Листья – это вершины со степенью 1, то есть у которых есть всего одно смежное ребро.

Компонента двусвязности в нашем случае подразумевается рёберная двусвязность – это множество вершин и рёбер, у котором между любой парой вершин есть хотя бы два рёберно не пересекающихся простых пути.

Дерево мостов графа G – это граф, в котором рёбра это мосты в графе G , а вершины – это компоненты рёберной двусвязности графа G , то есть мы каждую компоненту двусвязности сжали до одной вершины и провели рёбра между теми которые связаны мостами.

Мост – это ребро при удалении которого граф распадается на несколько компонент связности.

Компонента связности – это множество вершин и рёбер в котором между любыми двумя вершинами есть путь.

Докажем теорему: если после удаления всех вершин степени 1 дерево мостов не является бамбуком, то в графе не существует маршрута

Доказательство:

Лемма:

Если после удаления листьев не было маршрута, то до удаления листьев маршрута тоже не было.

Доказательство леммы:

От противного: пусть до удаления листьев был маршрут M , а после нет маршрута. Рассмотрим ребро ведущее в лист, пускай это ребро B , если оно первое или последнее в маршруте M , то его просто можно убрать и у нас останется валидный маршрут, если оно в маршруте M между рёбрами A , C , то у A есть общая вершина с B и у C есть общая вершина с B , B лежит между двумя вершинами (одна из них лист), значит вторая это вершина которая есть у рёбер A и C , значит мы опять из маршрута M можем удалить ребро B и у нас остаётся валидный маршрут. Лемма доказана.

Получаем, что если в изначальном графе есть маршрут, то в графе без листьев он тоже есть.

Так как дерево мостов не бамбук, значит в нём существуют 3 вершины, которые не лежат ни на каком простом пути.

Все компоненты двусвязности размера хотя бы 2, потому что мы удалили все листья.

То есть имеем три ребра (a , b , c) лежащих в разных компонентах двусвязности, при чём эти компоненты в дереве мостов не лежат ни в каком пути.

То есть у нас ситуация как на картинке: есть 3 компоненты A , B , C которые соединены через компоненту между ними, в каждой из компонент есть по ребре (a , b , c) и в компоненту между ними ведут рёбра (a_1 , b_1 , c_1).

Из-за всего этого рёбра (a , b , c) не принадлежат никакому маршруту, от противного:

Б.О.О рассмотрим маршрут m из ребра a в ребро b .

1) Маршрут m не может содержать ребро c до ребра a , потому что тогда ему бы пришлось сначала зайти в компоненту ребра a , а потом выйти из неё, но из компоненты есть всего одно выходное ребро a_1

2) Аналогично после ребра b маршрут не может содержать ребро c .

3) Между рёбрами a , b ребро c в маршруте тоже не может быть, потому что тогда надо сначала зайти в компоненту ребра c , а потом из неё выйти.

Из-за 1,2,3 в маршруте, котором есть рёбра a и b не может быть ребра c .

Теорема доказана.

В данном графе после удаления всех вершин степени 1 дерево мостов не является бамбуком, то в графе не существует маршрута

РЕШЕНИЕ (2 вариант):

Разобьём граф на 4 части:

1 часть состоит из вершин 3, 1, 14, 2, 5

2 часть состоит из вершин 10, 13, 12, 15, 11

3 часть состоит из вершин 4, 6

4 часть состоит из вершин 7, 8, 9

Внутри одной части можно найти маршрут стартуя с любого ребра в рассматриваемой части, но из одной части попасть в другую можно только по одному ребру:

Из 1 части во 2 часть можно попасть, используя ребро 3-10, из 2 части в 3: 11-4, из 1 части в 4: 7-13.

Если начинать с 1 части, то можно сначала попасть во 2 часть, потом только в одну из оставшихся (3 или 4 часть).

Если начать со 2 части, то можно попасть только в одну из трех оставшихся частей.

Если начать с 3 части, то можно сначала попасть во 2 часть, потом только в одну из оставшихся (1 или 4 часть).

Если начать с 4 части, то можно сначала попасть во 2 часть, потом только в одну из оставшихся (1 или 3 часть).

Получается, что в любом случае остаются рёбра, которые не были использованы, тогда маршрута по всем рёбрам графа не существует.

ОТВЕТ:

Не существует

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

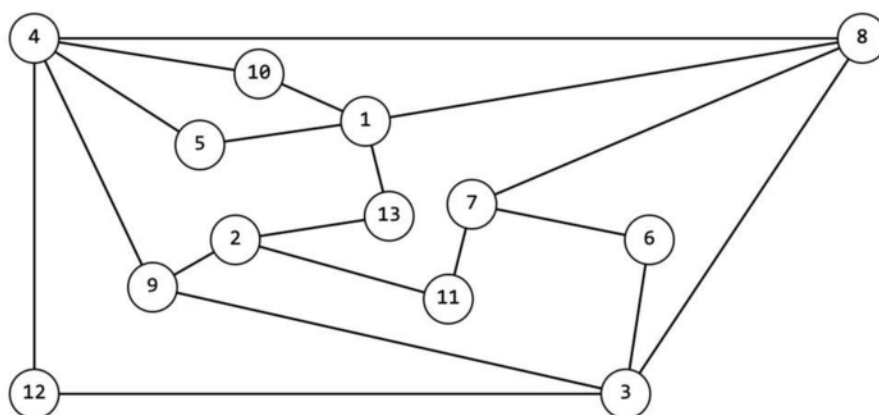
Полное решение	20 баллов
Верное разделение на части	10 баллов
Отсутствует решение. Или в решение указан Эйлеров путь. Или отмечено, что вершина 15 является конечной/начальной.	0 баллов

Задание 5. (20 баллов)

Дан связный неориентированный граф.

Необходимо найти паросочетание размера 6, или доказать, что его не существует.

*Паросочетание — это набор рёбер графа, никакие два из которых не имеют общих вершин. Размер паросочетания — это количество рёбер в нём.



РЕШЕНИЕ:

«Доли» — это разбиение множества вершин на два набора, так что:

- все вершины графа попадают либо в первую долю, либо во вторую;
- доли не пересекаются (нет вершины, которая была бы в обеих сразу).

Неориентированный граф называется двудольным, если его вершины можно разбить на две доли (две части) так, что:

- каждое ребро соединяет вершину из первой доли с вершиной из второй,
- нет ни одного ребра, у которого обе вершины лежали бы в одной и той же доле.

В рассматриваемом графе можно определить разбиение вершин на две доли:

$L = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ (5 вершин)

$R = \{5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ (8 вершин)

Сделать это можно однозначно, чередуя каждую долю для каждой вершины (альтернатива — раскраска).

И все рёбра идут только между L и R , значит граф двудольный.

Следовательно каждое ребро паросочетания забирает одну вершину из L и одну из R , отметим, что вершины в паросочетании не повторяются, значит, количество рёбер в любом паросочетании не может превышать размера меньшей доли ($\min(|L|, |R|) = 5$).

Поэтому в таком графе паросочетание размера 6 невозможно.

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Не доказали, что разделение однозначно	18 баллов
Правильно разделили на доли и доказали, что размер паросочетания не больше, чем размер меньшей доли	12 баллов
Правильное разделение на доли (правильная раскраска)	6 баллов
Отсутствует решение	0 баллов