

8 класс

Задание 1. (20 баллов)

Найти все неотрицательные целые числа x, y, z , которые удовлетворяют всем условиям:

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 67$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 67$$

$$x \& (y \oplus z) = 203$$

$$x \oplus (y \mid z) = 0$$

если дополнительно известно, что на каждое число выделяется 1 байт памяти.

В качестве ответа запишите значения x, y, z в десятичной системе счисления.

**(в данной задаче используются битовые операции: $\sim$ инверсия, $\&$ И, $\mid$ ИЛИ, $\oplus$ XOR)*

РЕШЕНИЕ:

Для каждого числа отведено 1 байт = 8 бит памяти, значит в двоичной системе счисления необходимо рассматривать числа длины 8.

$$67 = 64 + 2 + 1 = 2^6 + 2^1 + 2^0 = 01000011_2$$

$$203 = 128 + 64 + 8 + 2 + 1 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11001011_2$$

Введем обозначения:

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 01000011 \quad (1)$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 01000011 \quad (2)$$

$$x \& (y \oplus z) = 11001011 \quad (3)$$

$$x \oplus (y \mid z) = 00000000 \quad (4)$$

Обратим внимание на то, что достаточно рассмотреть только три случая, так как значение битов на местах 1 и 5; 2, 7 и 8; 3, 4 и 6 совпадают во всех условиях (нумерация слева направо, начиная с 1)

Далее будет использовать определения:

9) $a \mid b = 0$ тогда, когда $a = 0$ и $b = 0$;

10) $a \mid b = 1$ тогда, когда одна или обе переменные = 1;

11) $a \& b = 0$ тогда, когда одна или обе переменные = 0;

12) $a \& b = 1$ тогда, когда $a = 1$ и $b = 1$;

13) $a \oplus b = 0$ тогда, когда $a = b$;

14) $a \oplus b = 1$ тогда, когда $a \neq b$;

15) $\sim a = 0$ тогда, когда $a = 1$;

16) $\sim a = 1$ тогда, когда $a = 0$.

1 случай (находим значения x, y и z на 1 и 5 битах)

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 0 \quad (1.1)$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 0 \quad (2.1)$$

$$x \& (y \oplus z) = 1 \quad (3.1)$$

$$x \oplus (y \mid z) = 0 \quad (4.1)$$

Подставим определение 4) в уравнение (3.1), получим:

$$x = 1 \quad (3.1.1)$$

$$y \oplus z = 1 \quad (3.1.2)$$

Значит из (3.1.1) $x=1$, тогда $\sim x = 0$. Подставим в (1.1):

$$(0 \& z) \mid (1 \& y) = 0 \quad (1.1)$$

Тогда

$$0 \& z = 0 \quad (1.1.1)$$

$$1 \& y = 0 \quad (1.1.2)$$

Из (1.1.2) получаем $y = 0$, подставим в (2.1)

$$\sim z \& (1 \mid 0) = 0 \quad (2.1)$$

Получаем, что $\sim z = 0$, значит $z = 1$. Осталось проверить (3.1) и (4.1):

$$1 \& (0 \oplus 1) = 1 \quad (3.1)$$

$$1 \oplus (0 \mid 1) = 0 \quad (4.1)$$

Противоречий нет, все верно. Значит на 1 и 5 битах $x = 1$, $y = 0$ и $z = 1$.

2 случай (находим значения x , y и z на 2, 7 и 8 битах)

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 1 \quad (1.2)$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 1 \quad (2.2)$$

$$x \& (y \oplus z) = 1 \quad (3.2)$$

$$x \oplus (y \mid z) = 0 \quad (4.2)$$

Подставим определение 4) в уравнение (2.2) и (3.2), получим:

$$\sim z = 1 \quad (2.2.1)$$

$$(x \mid y) = 1 \quad (2.2.2)$$

$$x = 1 \quad (3.2.1)$$

$$(y \oplus z) = 1 \quad (3.2.2)$$

Получили $z = 0$, $x = 1$, подставляя в (3.2.2) используя свойство 6) получаем $y = 1$.

Осталось только проверить все условия:

$$(0 \& 0) \mid (1 \& 1) = 1 \quad (1.2)$$

$$1 \& (1 \mid 1) = 1 \quad (2.2)$$

$$1 \& (1 \oplus 0) = 1 \quad (3.2)$$

$$1 \oplus (1 \mid 0) = 0 \quad (4.2)$$

Противоречий не обнаружено, значит нашли однозначно значения на 2, 7 и 8 битах $x = 1$, $y = 1$ и $z = 0$.

3 случай (находим значения x , y и z на 3, 4 и 6 битах)

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 0 \quad (1.3)$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 0 \quad (2.3)$$

$$x \& (y \oplus z) = 0 \quad (3.3)$$

$$x \oplus (y \mid z) = 0 \quad (4.3)$$

Пусть $x = 1$, тогда подставим в (1.3), получим $(0 \& z) \mid (1 \& y) = 0$, учитывая свойство 1): $1 \& y = 0$, а значит $y = 0$, подставим в (2.3) $\sim z \& (1 \mid 0) = 0$, значит $\sim z \& 1 = 0$, тогда $\sim z \& 1 = 0$, получаем $\sim z = 0$, следовательно $z = 1$.

Проверим все условия:

$$(0 \& 1) \mid (1 \& 0) = 0 \quad (1.3)$$

$$0 \& (1 \mid 0) = 0 \quad (2.3)$$

$$1 \& (0 \oplus 1) \neq 0 \quad (3.3)$$

$$1 \oplus (0 \mid 1) = 0 \quad (4.3)$$

В таком случае получаем противоречие в (3.3), тогда можно сделать вывод о том, что наше предположение о том, что $x = 1$ неверно, тогда $x = 0$.

Подставим в (1.3) учитывая свойство 1): $1 \& z = 0$, а значит $z = 0$, подставим в (4.3) $0 \oplus (y \mid 0) = 0$, учитывая свойство 5): $y \mid 0 = 0$, значит $y = 0$. Проверим все условия:

$$(1 \& 0) \mid (0 \& 0) = 0 \quad (1.3)$$

$$1 \& (0 \mid 0) = 0 \quad (2.3)$$

$$0 \& (0 \oplus 0) = 0 \quad (3.3)$$

$$0 \oplus (0 \mid 0) = 0 \quad (4.3)$$

Противоречий не найдено, значит получили однозначное решение на 3, 4 и 6 битах $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$.

Тогда окончательный ответ:

$$x = 11001011_2 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 8 + 2 + 1 = 203$$

$$y = 01000011_2 = 2^6 + 2^1 + 2^0 = 64 + 2 + 1 = 67$$

$$z = 10001000_2 = 2^7 + 2^3 = 128 + 8 = 136$$

РЕШЕНИЕ (2 вариант):

Для каждого числа отведено 1 байт = 8 бит памяти, значит в двоичной системе счисления необходимо рассматривать числа длины 8.

$$67 = 64 + 2 + 1 = 2^6 + 2^1 + 2^0 = 01000011_2$$

$$203 = 128 + 64 + 8 + 2 + 1 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11001011_2$$

Введем обозначения:

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 01000011 \quad (1)$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 01000011 \quad (2)$$

$$x \& (y \oplus z) = 11001011 \quad (3)$$

$$x \oplus (y | z) = 00000000$$

(4)

Рассмотрим таблицу истинности для данных выражений:

Номер строки	x	y	z	(1)	(2)	(3)	(4)	Кол-во повторений
1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	1	1	0	0	1	2
3	0	1	0	0	1	0	1	2
4	0	1	1	1	0	0	1	2
5	1	0	0	0	1	0	1	2
6	1	0	1	0	0	1	0	1
7	1	1	0	1	1	1	0	1
8	1	1	1	1	0	0	0	1

В последнем столбце указано количество повторений для значений (1)-(4), значит если встречается строка 1001 или 0101, тогда будет 2 варианта для значений переменных x, y, z, а во всех остальных случаях - единственное решение.

Осталось сопоставить значения строк первой таблицы и вычислить значения переменных:

(1)	(2)	(3)	(4)	x	y	z	Номер строки в 1 таблице
0	0	1	0	1	0	1	6
1	1	1	0	1	1	0	7
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	6
0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	7
1	1	1	0	1	1	0	7

Тогда получаем:

$$x = 11001011_2 = 128+64+8+2+1 = 203$$

$$y = 01000011_2 = 64+2+1 = 67$$

$$z = 10001000_2 = 128+8 = 136$$

ОТВЕТ:

$$x = 203, y = 67, z = 136$$

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Получили неверный ответ из-за ошибки при переводе чисел из 2 системы счисления в 10 систему счисления	18 баллов
Доказали единственность решения и верное его нашли в 2 системе счисления	16 баллов
Верно соотнесли значения каждого бита с таблицей	15 баллов
Правильно использовали логические операции и указали определения 1-8, возможное добавление частичных баллов за объяснение не всех пунктов	11 баллов
Правильно составлена таблица истинности для исходной системы	6 баллов
Правильно перевели числа в 2 систему счисления	1 балл
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 2. (20 баллов)

Дано три числа $A = 3x3_a$, $B = 1y7_b$, $C = 39z_c$, записанные в системах счисления a, b, c соответственно (в числах буквы x, y, z обозначают неизвестный один разряд). Если данные числа расположить в таком порядке: A, B, C, то они будут образовывать арифметическую прогрессию. Сумма чисел A, B, C равна 2100 в десятичной

системе счисления. Произведение оснований данных чисел равно 4095 в десятичной системе счисления, а также $a < c < b$.

Необходимо определить значения всех неизвестных. Записать ответ в виде $xyzabcABC$.

РЕШЕНИЕ:

Так как числа A, B, C образуют арифметическую прогрессию, следовательно $2 \cdot B = A + C$.

Из условия: $A + B + C = 2100$, значит $B = 700$. Числа a, b, c находятся среди делителей 4095, т.е. $\{1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 21, 35, 39, \text{и т.д.}\}$. Каждый разряд в числе должен быть меньше основания, тогда $a > 3, b > 7, c > 9$, известно $a < c < b$, тогда $a > 3, b > 10, c > 9$, учитывая делители 4095, то $a_{\min} = 5, b_{\min} = 15, c_{\min} = 13$.

Распишем $B = b^2 + by + 7 = 700$ и оценим сверху значение b , зная $B = 700$, получаем $b^2 = 693 - by \leq 693$, значит $b_{\max} = 26, b > 10$ и является делителем 4095, значит $b = \{13, 15, 21\}$

$A = 3a^2 + ax + 3, C = 3c^2 + 9c + z$, подставим в условие $A + C = 1400$, получим $3a^2 + ax + 3 + 3c^2 + 9c + z = 1400$.

Чтобы оценить наибольшее значение при условии, что $c > 9$, получаем:

$3a^2 = 1400 - ax - 3 - 3c^2 - 9c - z \leq 1400 - 3 - 300 - 90 = 1007, a_{\max} = 18$ с учетом того, что $a > 3$ и тот, что число a является делителем 4095, получаем $a = \{5, 7, 9, 13, 15\}$

Аналогично находим то, что $c < 24$, значит $c = \{13, 15, 21\}$.

Получили $a = \{5, 7, 9, 13, 15\}, c = \{13, 15, 21\}, b = \{13, 15, 21\}, a \cdot b \cdot c = 4095$ и $a < c < b$.

Будем перебирать c .

1) Пусть $c = 13$: тогда $a = \{5, 7, 9\}, b = \{15, 21\}$: если $b = 15$, тогда $a = 4095 : 195 = 21$, не удовлетворяет условию того, что $a = \{5, 7, 9\}$; если $b = 21$, тогда $a = 13$, не удовлетворяет условию того, что $a = \{5, 7, 9\}$

2) Пусть $c = 15$: тогда $a = \{5, 7, 9, 13\}, b = 21$, тогда $a = 13$, подходит.

3) Пусть $c = 21$: тогда для b нет подходящих вариантов, которые удовлетворяли бы условию, что $c < b$.

Получили, что $a = 13, b = 21, c = 15$.

Тогда $B = 441 + 21y + 7 = 700$, получаем $y = 12$.

$A = 3a^2 + ax + 3 = 510 + 13x, C = 3c^2 + 9c + z = 810 + z, A + C = 1400, x < 13, z < 15$.

Тогда $510 + 13x + 810 + z = 1400, 13x + z = 80$, тогда $z = 80 - 13x$ и $z < 15$, тогда $80 - 13x < 15$, получаем $x > 5$

С другой стороны $x = (80 - z) / 13 \leq 80 / 13 \approx 6,15$. Тогда получаем $x = 6, a z = 80 - 78 = 2$.

$A = 510 + 78 = 588$

$C = 810 + 2 = 812$

Получаем: $x = 6, y = 12, z = 2, a = 13, b = 21, c = 15, A = 588, B = 700, C = 812$.

ОТВЕТ:

6122132115588700812

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Верно доказаны все предыдущие пункты и получен неверный ответ из-арифметической ошибки	18 баллов
Нашли $B = 700$ и доказали ограничения для a, b, c , также доказали единственность решения	15 баллов
Нашли ограничения для a, b, c (за каждую букву по 3 балла)	9 баллов
Доказали, что $B = 700$	1 балл
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 3. (20 баллов)

Маршрутом будем называть последовательность различных ребер графа, где каждые два соседних ребра имеют общую вершину. Дан связный неориентированный граф, необходимо доказать, что в графе не существует маршрута по всем ребрам или предоставить его, если существует.

Полное решение	20 баллов
Доказали кратность 17	+4 балла
Верно оценили ответ сверху (128)	+4 балла
Верно оценили ответ снизу (114)	+4 балла
Верно начаты рассуждения (в зависимости от того, сколько доказали)	До 3 баллов
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 5. (20 баллов)

Василий придумал алгоритм сортировки, который работает следующим образом:

- 1) В текущем неотсортированном массиве находятся минимальный и максимальный элементы.
 - 2) Минимальный элемент помещается в начало массива, максимальный — в конец.
 - 3) Границы неотсортированной области сдвигаются: левая граница увеличивается на 1, правая уменьшается на 1.
 - 4) Шаги 1-3 повторяются до тех пор, пока не останется не более одного неотсортированного элемента.
- Но учительнице такой способ не очень понравился, она предложила сначала разделить массив на две равные части, если количество элементов четное, иначе правую половинку взять на 1 элемент больше. Отсортировать две половинки и потом соединить два отсортированных подмассива в один массив так, чтобы он стал отсортированным.

Необходимо объяснить, как именно будут два подмассива сливаться в один на последнем шаге и определить минимальное количество сравнений элементов массива длины 100, если используется данный алгоритм сортировки?

РЕШЕНИЕ:

Пусть массив из 100 элементов разбит на две части:

левый подмассив: 50 элементов, отсортирован по возрастанию L

правый подмассив: 50 элементов, тоже отсортирован по возрастанию R

На шаге слияния:

Берутся два указателя:

i — на текущий элемент левого подмассива (изначально на первый),

j — на текущий элемент правого подмассива (изначально на первый).

Сравниваются элементы L[i] и R[j].

Если $L[i] \leq R[j]$, то L[i] записывается в результирующий массив, i увеличивается на 1.

Иначе записывается R[j], j увеличивается на 1.

Когда один подмассив исчерпан, оставшиеся элементы другого просто дописываются в конец результирующего массива без сравнений, так как внутри каждого подмассива элементы уже отсортированы.

Слияние двух отсортированных массивов длины m и n в худшем случае требует $m + n - 1$ сравнений. Здесь $m = 50$, $n = 50 \rightarrow$ максимум 99 сравнений.

А минимальное количество сравнений для массива длины 100 при данном алгоритме, то есть в наиболее благоприятной конфигурации элементов.

Минимум будет, когда один из подмассивов «полностью меньше» другого.

Например:

все 50 элементов левого подмассива меньше всех 50 элементов правого (или наоборот).

Тогда слияние пойдёт так:

сравнение 1: L[1] и R[1] $\rightarrow$ выясняется, что $L[1] < R[1]$ дальше мы будем последовательно вытаскивать все элементы из левого подмассива по одному, каждый раз сравнивая текущий L[i] с тем же R[1], пока левый не закончится. Получается, что минимальное количество сравнений 50.

До этого два массива длиной по 50 должны быть также отсортированы алгоритмом Василия, будем считать, что за один проход он сохраняет максимальный и минимальный элемент, тогда для сортировки массива длины 50 необходимо $50 + 48 + 46 + \dots + 4 + 2 = (50 + 2) \cdot 25 / 2 = 650$ сравнений, так как у нас два массива, то необходимо $650 \cdot 2 = 1300$ сравнений.

Получаем $1300+50 = 1350$.

ОТВЕТ:

1350

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Правильно оценено минимальное количество сравнений на последнем шаге	+5 баллов
Верно посчитано количество сравнений по алгоритму Василя	+5 баллов
Правильно описано слияние двух массивов	+5 баллов
Отсутствует решение	0 баллов