

9 класс

Задание 1. (20 баллов)

Найти все неотрицательные целые числа x, y, z , которые удовлетворяют всем условиям:

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 67$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 67$$

$$x \& (y \oplus z) = 203$$

$$x \oplus (y \mid z) = 0$$

если дополнительно известно, что на каждое число выделяется 1 байт памяти.

В качестве ответа запишите значения x, y, z в десятичной системе счисления.

**(в данной задаче используются битовые операции: $\sim$ инверсия, $\&$ И, $\mid$ ИЛИ, $\oplus$ исключающее ИЛИ)*

РЕШЕНИЕ:

Для каждого числа отведено 1 байт = 8 бит памяти, значит в двоичной системе счисления необходимо рассматривать числа длины 8.

$$67 = 64 + 2 + 1 = 2^6 + 2^1 + 2^0 = 01000011_2$$

$$203 = 128 + 64 + 8 + 2 + 1 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11001011_2$$

Введем обозначения:

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 01000011 \quad (1)$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 01000011 \quad (2)$$

$$x \& (y \oplus z) = 11001011 \quad (3)$$

$$x \oplus (y \mid z) = 00000000 \quad (4)$$

Обратим внимание на то, что достаточно рассмотреть только три случая, так как значение битов на местах 1 и 5; 2, 7 и 8; 3, 4 и 6 совпадают во всех условиях (нумерация слева направо, начиная с 1)

Далее будет использовать определения:

- 1) $a \mid b = 0$ тогда, когда $a = 0$ и $b = 0$;
- 2) $a \mid b = 1$ тогда, когда одна или обе переменные = 1;
- 3) $a \& b = 0$ тогда, когда одна или обе переменные = 0;
- 4) $a \& b = 1$ тогда, когда $a = 1$ и $b = 1$;
- 5) $a \oplus b = 0$ тогда, когда $a = b$;
- 6) $a \oplus b = 1$ тогда, когда $a \neq b$;
- 7) $\sim a = 0$ тогда, когда $a = 1$;
- 8) $\sim a = 1$ тогда, когда $a = 0$.

1 случай (находим значения x, y и z на 1 и 5 битах)

$$(\sim x \& z) \mid (x \& y) = 0 \quad (1.1)$$

$$\sim z \& (x \mid y) = 0 \quad (2.1)$$

$$x \& (y \oplus z) = 1 \quad (3.1)$$

$$x \oplus (y \mid z) = 0 \quad (4.1)$$

Подставим определение 4) в уравнение (3.1), получим:

$$x = 1 \quad (3.1.1)$$

$$y \oplus z = 1 \quad (3.1.2)$$

Значит из (3.1.1) $x=1$, тогда $\sim x = 0$. Подставим в (1.1):

$$(0 \& z) \mid (1 \& y) = 0 \quad (1.1)$$

Тогда

$$0 \& z = 0 \quad (1.1.1)$$

$$1 \& y = 0 \quad (1.1.2)$$

Из (1.1.2) получаем $y = 0$, подставим в (2.1)

$$\sim z \& (1 \mid 0) = 0 \quad (2.1)$$

Получаем, что $\sim z = 0$, значит $z = 1$. Осталось проверить (3.1) и (4.1):

$$1 \& (0 \oplus 1) = 1 \quad (3.1)$$

$$1 \oplus (0 | 1) = 0 \quad (4.1)$$

Противоречий нет, все верно. Значит на 1 и 5 битах $x = 1$, $y = 0$ и $z = 1$.

2 случай (находим значения x , y и z на 2, 7 и 8 битах)

$$(\sim x \& z) | (x \& y) = 1 \quad (1.2)$$

$$\sim z \& (x | y) = 1 \quad (2.2)$$

$$x \& (y \oplus z) = 1 \quad (3.2)$$

$$x \oplus (y | z) = 0 \quad (4.2)$$

Подставим определение 4) в уравнение (2.2) и (3.2), получим:

$$\sim z = 1 \quad (2.2.1)$$

$$(x | y) = 1 \quad (2.2.2)$$

$$x = 1 \quad (3.2.1)$$

$$(y \oplus z) = 1 \quad (3.2.2)$$

Получили $z = 0$, $x = 1$, подставляя в (3.2.2) используя свойство 6) получаем $y = 1$.

Осталось только проверить все условия:

$$(0 \& 0) | (1 \& 1) = 1 \quad (1.2)$$

$$1 \& (1 | 1) = 1 \quad (2.2)$$

$$1 \& (1 \oplus 0) = 1 \quad (3.2)$$

$$1 \oplus (1 | 0) = 0 \quad (4.2)$$

Противоречий не обнаружено, значит нашли однозначно значения на 2, 7 и 8 битах $x = 1$, $y = 1$ и $z = 0$.

3 случай (находим значения x , y и z на 3, 4 и 6 битах)

$$(\sim x \& z) | (x \& y) = 0 \quad (1.3)$$

$$\sim z \& (x | y) = 0 \quad (2.3)$$

$$x \& (y \oplus z) = 0 \quad (3.3)$$

$$x \oplus (y | z) = 0 \quad (4.3)$$

Пусть $x = 1$, тогда подставим в (1.3), получим $(0 \& z) | (1 \& y) = 0$, учитывая свойство 1): $1 \& y = 0$, а значит $y = 0$, подставим в (2.3) $\sim z \& (1 | 0) = 0$, значит $\sim z \& 1 = 0$, тогда $\sim z \& 1 = 0$, получаем $\sim z = 0$, следовательно $z = 1$.

Проверим все условия:

$$(0 \& 1) | (1 \& 0) = 0 \quad (1.3)$$

$$0 \& (1 | 0) = 0 \quad (2.3)$$

$$1 \& (0 \oplus 1) \neq 0 \quad (3.3)$$

$$1 \oplus (0 | 1) = 0 \quad (4.3)$$

В таком случае получаем противоречие в (3.3), тогда можно сделать вывод о том, что наше предположение о том, что $x = 1$ неверно, тогда $x = 0$.

Подставим в (1.3) учитывая свойство 1): $1 \& z = 0$, а значит $z = 0$, подставим в (4.3) $0 \oplus (y | 0) = 0$, учитывая свойство 5): $y | 0 = 0$, значит $y = 0$. Проверим все условия:

$$(1 \& 0) | (0 \& 0) = 0 \quad (1.3)$$

$$1 \& (0 | 0) = 0 \quad (2.3)$$

$$0 \& (0 \oplus 0) = 0 \quad (3.3)$$

$$0 \oplus (0 | 0) = 0 \quad (4.3)$$

Противоречий не найдено, значит получили однозначное решение на 3, 4 и 6 битах $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$.

Тогда окончательный ответ:

$$x = 11001011_2 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 8 + 2 + 1 = 203$$

$$y = 01000011_2 = 2^6 + 2^1 + 2^0 = 64 + 2 + 1 = 67$$

$$z = 10001000_2 = 2^7 + 2^3 = 128 + 8 = 136$$

РЕШЕНИЕ (2 вариант):

Для каждого числа отведено 1 байт = 8 бит памяти, значит в двоичной системе счисления необходимо рассматривать числа длины 8.

$$67 = 64 + 2 + 1 = 2^6 + 2^1 + 2^0 = 01000011_2$$

$$203 = 128 + 64 + 8 + 2 + 1 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11001011_2$$

Введем обозначения:

$$(\sim x \& z) | (x \& y) = 01000011 \quad (1)$$

$$\sim z \& (x | y) = 01000011 \quad (2)$$

$$x \& (y \oplus z) = 11001011 \quad (3)$$

$$x \oplus (y | z) = 00000000 \quad (4)$$

Рассмотрим таблицу истинности для данных выражений:

Номер строки	x	y	z	(1)	(2)	(3)	(4)	Кол-во повторений
1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	1	1	0	0	1	2
3	0	1	0	0	1	0	1	2
4	0	1	1	1	0	0	1	2
5	1	0	0	0	1	0	1	2
6	1	0	1	0	0	1	0	1
7	1	1	0	1	1	1	0	1
8	1	1	1	1	0	0	0	1

В последнем столбце указано количество повторений для значений (1)-(4), значит если встречается строка 1001 или 0101, тогда будет 2 варианта для значений переменных x, y, z, а во всех остальных случаях - единственное решение.

Осталось сопоставить значения строк первой таблицы и вычислить значения переменных:

(1)	(2)	(3)	(4)	x	y	z	Номер строки в 1 таблице
0	0	1	0	1	0	1	6
1	1	1	0	1	1	0	7
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	6
0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	7
1	1	1	0	1	1	0	7

Тогда получаем:

$$x = 11001011_2 = 128+64+8+2+1 = 203$$

$$y = 01000011_2 = 64+2+1 = 67$$

$$z = 10001000_2 = 128+8 = 136$$

ОТВЕТ:

$$x = 203, y = 67, z = 136$$

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Получили неверный ответ из-за ошибки при переводе чисел из 2 системы счисления в 10 систему счисления	18 баллов
Доказали единственность решения и верное его нашли в 2 системе счисления	16 баллов
Верно соотнесли значения каждого бита с таблицей	15 баллов
Правильно использовали логические операции и указали определения 1-8, возможное добавление частичных баллов за объяснение не всех пунктов	11 баллов
Правильно составлена таблица истинности для исходной системы	6 баллов
Правильно перевели числа в 2 систему счисления	1 балл
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 2. (20 баллов).

Даны три числа $A = 3x3_a$, $B = 1y7_b$, $C = 39z_c$, записанные в системах счисления a, b, c соответственно (буквы x, y, z обозначают неизвестный разряд). Если расположить данные числа в порядке A, B, C, то их значения

образуют арифметическую прогрессию Сумма чисел A, B, C равна 2100_{10} . Число A кратно 7. Также известно, что произведение оснований систем счисления данных чисел равно 4095_{10} .

Необходимо определить значения всех неизвестных. Записать ответ в виде $xyzabcABC$.

РЕШЕНИЕ:

Так как числа A, B, C образуют арифметическую прогрессию, следовательно $2 \cdot B = A + C$.

Из условия: $A+B+C=2100$, значит $B = 700$. Числа a, b, c находятся среди делителей 4095 , т.е. $\{1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 21, 35, 39, \text{и т.д.}\}$. Каждый разряд в числе должен быть меньше основания, тогда $a > 3, b > 7, c > 9$, учитывая делители 4095 , то $a_{\min} = 5, b_{\min} = 9, c_{\min} = 13$.

Распишем $B = b^2 + by + 7 = 700$ и оценим сверху значение b , зная $B=700$, получаем $b^2 = 693 - by \leq 693$, значит $b_{\max} = 26, b > 7$ и является делителем 4095 , значит $b = \{9, 13, 15, 21\}$, $y = (693 - b^2)/b$, также $0 \leq y < b$, тогда $0 \leq (693 - b^2)/b < b$, получаем $18 < b \leq 26$, тогда $b = 21, a = 12$.

$A = 3a^2 + ax + 3, C = 3c^2 + 9c + z$, подставим в условие $A + C = 1400$, получим $3a^2 + ax + 3 + 3c^2 + 9c + z = 1400$.

Чтобы оценить наибольшее значение при условии, что $c > 9$, получаем:

$3a^2 = 1400 - ax - 3 - 3c^2 - 9c - z \leq 1400 - 3 - 300 - 90 = 1007, a_{\max} = 18$ с учетом того, что $a > 3$ и тот, что число a является делителем 4095 , получаем $a = \{5, 7, 9, 13, 15\}$

Аналогично находим то, что $c < 24$, значит $c = \{13, 15, 21\}$.

(1 способ)

Получили $a = \{5, 7, 9, 13, 15\}, c = \{13, 15, 21\}, a \cdot c = 195$, тогда остается рассмотреть только два варианта:

- 1) $a=13$ и $c=15$: тогда $x < 13$ и $A = 510 + 13x$ кратно 7, подходит только $x = 6$, тогда $A = 588, C = 812 = 810 + z, z = 2$.
- 2) $a=15$ и $c=13$: тогда $x < 15$ и $A = 678 + 15x$ кратно 7, подходит $x = \{1, 8\}$. Рассмотрим $x = 1, A = 693, C = 707 = 624 + z, z = 83 > c$, противоречие. Рассмотрим $x = 8, A = 798, C = 602 = 624 + z, z = -22 < 0$, противоречие.

Остается только вариант: $a=13, c=15, x = 6, A=588, C=812, z=2$.

(2 способ)

$A + C = 1400$, тогда $C = 1400 - A$

$C = 3c^2 + 9c + z$, тогда $z = 1400 - A - 3c^2 - 9c$

$0 \leq z < c$, тогда $0 \leq 1400 - A - 3c^2 - 9c < c$,

$3c^2 + 9c - 1400 \leq -A < 3c^2 + 10c - 1400$

$-3c^2 - 10c + 1400 < A \leq -3c^2 - 9c + 1400$

Если $c = 13: 763 < A \leq 776$, рассматриваем только A кратные 7, значит подходит только $A=770$, тогда $3a^2 + ax = 767$, значит 767 должно быть кратно a , ранее было доказано, что $a = \{5, 7, 9, 13, 15\}$, тогда подходит только $a=13$, подставим и найдем $x: 13x=260, x=20 > a$, значит не подходит.

Если $c = 15: 575 < A \leq 590$, рассматриваем только A кратные 7, значит подходит $A=\{581, 588\}$. Пусть $A=581$, тогда $3a^2 + ax = 578$, значит 578 должно быть кратно a , ранее было доказано, что $a = \{5, 7, 9, 13, 15\}$, но из данного множества никакое значение a не подходит. Рассмотрим $A=588, 3a^2 + ax = 585$, значит 585 должно быть кратно a , ранее было доказано, что $a = \{5, 7, 9, 13, 15\}$, тогда подходят $a=\{5, 9, 13, 15\}, 0 \leq x < a$

$0 \leq (585 - 3a^2)/a < a, 12 < a \leq 13$, тогда $a = 13, x = 6. C = 812, 3c^2 + 9c + z = 812$, учитывая то, что $0 \leq z < c$, получаем $0 \leq 812 - 3c^2 - 9c < c$, тогда $14 < c \leq 15$, значит $c=15, a = 13, z = 2$.

Если $c = 21: -133 < A \leq -112$, нет решений, так как A должно быть положительным

Получаем: $x=6, y=12, z=2, a=13, b=21, c=15, A=588, B=700, C=812$.

ОТВЕТ:

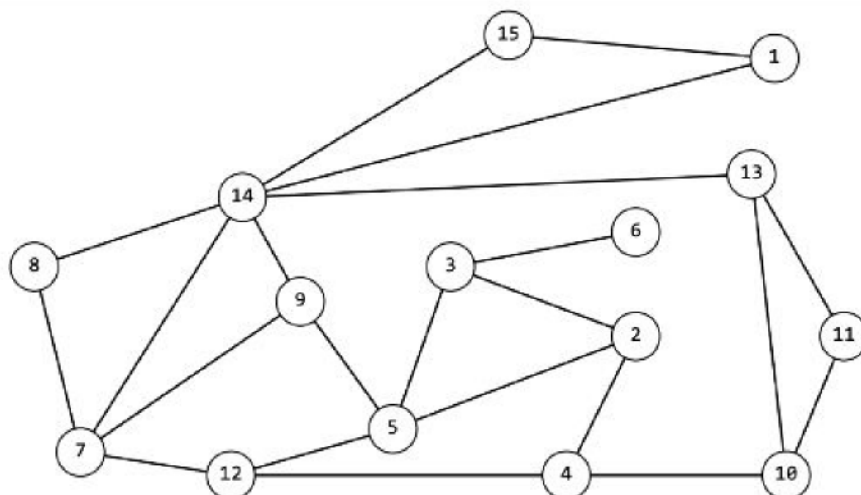
6122132115588700812

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Верно доказаны все предыдущие пункты и получен неверный ответ из-арифметической ошибки	18 баллов
Нашли $B=700$ и доказали ограничения для a, b, c , также доказали единственность решения	15 баллов
Нашли ограничения для a, b, c (за каждую букву по 3 балла)	9 баллов
Доказали, что $B=700$	1 балл
Отсутствует решение	0 баллов

Задание 3. (20 баллов).

Маршрутом будем называть последовательность различных ребер графа, где каждые два соседних ребра имеют общую вершину. Дан связный неориентированный граф, необходимо доказать, что в графе не существует маршрута по всем ребрам или предоставить его, если существует.

**РЕШЕНИЕ:**

Существует маршрут, например: (1-15), (1-14), (14-15), (13-14), (9-14), (7-14), (8-14), (7-8), (7-9), (7-12), (4-12), (5-12), (5-9), (2-5), (3-5), (3-6), (2-3), (2-4), (4-10), (10-13), (10-11), (11-13)

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Привели один из правильных вариантов ответа	20 баллов
Отсутствует решение. Или в решении пишут про Эйлеров путь. Или доказывают отсутствие маршрута через нечетность степеней вершин.	0 баллов

Задание 4. (20 баллов).

Перед вами стоит необычная шахматная доска размера 13 на 16. Необходимо определить, можно ли разместить 40 королей так, чтобы выполнялось два условия:

- 1) Никакой король не может дойти ни до какого другого за один шаг
 - 2) Для любой пустой клетки существует король, который может дойти до неё за один шаг
- Если это возможно, тогда показать пример, иначе доказать обратное.

**Король может ходить на одну клетку вправо, влево, вверх, вниз и по диагонали.*

РЕШЕНИЕ:

Пусть K – количество королей.

Чтобы каждый король не смог дойти до другого короля необходимо, чтобы в каждом блоке 2 на 2 был максимум один король, поэтому можно ограничить сверху:

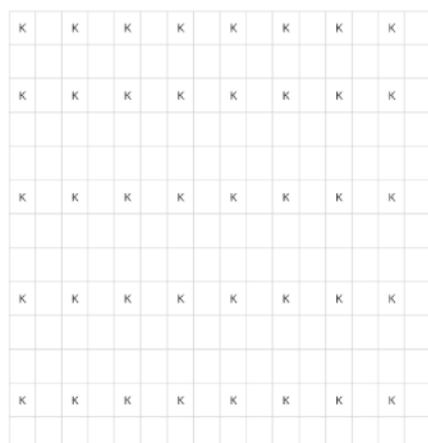
$$K \leq ((N + 1) // 2) \cdot ((M + 1) // 2) = 56$$

Чтобы из каждой пустой клетки можно было дойти до короля, то в каждом блоке 3 на 3 достаточно одного короля, поэтому можно ограничить сверху:

$$K \geq ((N + 2) // 3) \cdot ((M + 2) // 3) = 30$$

Значит на доске 13 на 16 можно расставить любое кол-во королей от 30 до 56.

Один из примеров расставления королей представлен на рисунке.



КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Привели один из правильных вариантов ответа с пояснением	20 баллов
Доказано ограничение сверху/снизу	5 баллов
Доказано, что в каждом участке 3 на 3 достаточно одного короля. Показали наиболее эффективную для минимизации k расстановку королей (один король в клетке (2, 2), остальные с шагом 3 от него)	5 баллов
Доказано, что в каждом участке 2 на 2 может быть не более одного короля. Показали наиболее эффективную для максимизации k расстановку королей (один король в углу, остальные с шагом 2 от него)	5 баллов
Отсутствует решение.	0 баллов

Задание 5. (20 баллов).

В музыкальной школе ученики играют на гитаре, барабанах и скрипке. Известно, что количество человек, которые играют и на барабанах, и на скрипке на 23 меньше, чем тех, кто играет только на гитаре. Тех, кто играет только на барабанах, на 40 человек больше тех, кто играет на всех инструментах сразу. Количество тех, кто играет и на гитаре, и на скрипке, но не играет на барабанах, в 17 раз больше тех, кто играет только на скрипке. Тех, кто играет на всех трех инструментах сразу, 11 человек. Также известно, что количество тех, кто играет на гитаре, не менее 229 и не более 237 человек, а тех, кто играет на барабанах, не менее 109 и не более 115 человек.

Вычислите, на сколько человек количество играющих на гитаре превышает количество играющих на барабанах?

РЕШЕНИЕ:

Из условия задачи $e+f+23=a$, $e=11$, тогда $a=f+34$, также дано, что $c-40=e$, тогда $c=40+11=51$.

Также учтем далее то, что $d=17g$

Играющих на гитаре $\Gamma = a+b+d+e = f+34+b+d+11 = f+b+17g+45$

Играющих на барабанах $\text{Б} = b+c+e+f = b+51+11+f = b+f+62$

Тогда $\Gamma - \text{Б} = f+17g+b+45 - (b+f+62) = 17g - 17 = 17(g - 1)$, получили то, что ответ должен быть кратен 17

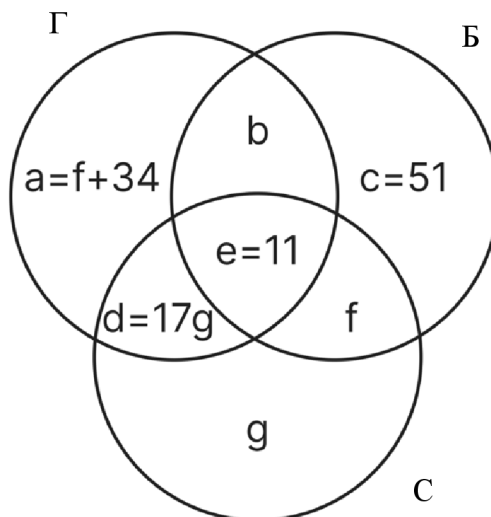
Дано: $229 \leq \Gamma \leq 237$ и $109 \leq \text{Б} \leq 115$.

Значит:

$229-115 \leq \Gamma - \text{Б} \leq 237-109$

$114 \leq \Gamma - \text{Б} \leq 128$

Причем это значение должно быть кратно 17, как показано выше, значит ответ 119

**ОТВЕТ:**

119

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ:

Полное решение	20 баллов
Доказали кратность 17	+4 балла
Верно оценили ответ сверху (128)	+4 балла
Верно оценили ответ снизу (114)	+4 балла
Верно начаты рассуждения (в зависимости от того, сколько доказали)	До 3 баллов
Отсутствует решение	0 баллов