



Задача (30 баллов)

На разрядах счетчика электрической энергии установились следующие значения: 123456. Определить показание счетчика X , а также абсолютную (Δ), относительную (δ) и приведенную (γ) погрешности этого показания. Результат измерения количества потребленной электроэнергии представить в форме: $E = (X \pm \Delta)$ [ед.изм.]. Класс точности средства измерений приведен на шкале прибора (рисунок).



Счетчик электрической энергии

Справка.

1) Под абсолютной погрешностью понимают отклонение измеренного значения величины от истинного:

$$\Delta_X = X - A,$$

где X – измеренное значение, A – истинное значение величины.

На практике зачастую ни значение, ни знак абсолютной погрешности Δ_X не известен. В этом случае вместо неизвестного теоретического значения абсолютной погрешности вводят ее оценку сверху, так называемое предельное значение абсолютной погрешности. Под предельной абсолютной погрешностью приближенного числа понимается всякое положительное число, не меньшее модуля абсолютной погрешности этого числа:

$$|\Delta_X| \leq \Delta$$

или

$$|X - A| \leq \Delta.$$

Из последнего неравенства следует, что истинное значение A заключено в границах

$$X - \Delta \leq A \leq X + \Delta.$$

Тогда, $X - \Delta$ есть оценка истинного значения снизу, а $X + \Delta$ есть оценка истинного значения сверху.

В этом случае для краткости пользуются записью

$$A = X \pm \Delta.$$

Абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой величины X .

2) Абсолютная погрешность (или предельная абсолютная погрешность) не достаточна для характеристики точности измерения или вычисления.

Так, например, если при измерении длин двух стержней получены результаты:

$$L_1 = 100 \text{ см} \pm 1 \text{ см} \text{ и } L_2 = 2 \text{ см} \pm 1 \text{ см},$$

то, несмотря на совпадение предельных абсолютных погрешностей, качество первого измерения выше, чем второго.

Для точности данных измерений существенна абсолютная погрешность, приходящаяся на единицу длины, которая носит название относительной погрешности.

Относительной погрешностью δ называют отношение абсолютной погрешности Δ к истинному значению величины A (при $A \neq 0$):

$$\delta = \frac{\Delta}{A}$$

отсюда

$$\Delta = \delta A.$$

Поскольку истинное значение величины A зачастую неизвестно, то на практике в последних формулах его заменяют измеренным значением X :

$$\delta = \frac{\Delta}{X}$$

отсюда

$$\Delta = \delta X.$$

Для результатов измерения длин двух стержней:

$$L_1 = 100 \text{ см} \pm 1 \text{ см} \text{ и } L_2 = 2 \text{ см} \pm 1 \text{ см}$$

соответствующие относительные погрешности

$$\delta_1 = 1\% \text{ и } \delta_2 = 50\%.$$

3) Приведенной погрешностью γ называется относительная погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к условно принятому значению величины (нормирующему значению X_N), постоянному во всем диапазоне измерений или в части диапазона:

Относительной погрешностью называют отношение абсолютной погрешности Δ к нормирующему значению величины:

$$\gamma = \frac{\Delta}{X_N}$$

отсюда

$$\Delta = \gamma X_N.$$

Нормирующее значение X_N выбирается в зависимости от вида и характера шкалы прибора. Если нулевая отметка находится на краю или вне рабочей части шкалы, то нормирующее значение принимается равным конечному значению X_K рабочей части шкалы текущего диапазона измерений. Приведенная погрешность так же выражается в процентах.

4) Согласно ГОСТ 8.401-80 «Государственная система обеспечения единства измерений. Классы точности средств измерений. Общие требования» обозначения класса точности средств измерений приводятся в соответствии со следующей таблицей:

Обозначение	Предел допускаемой основной погрешности, %	Пояснения
1,5	$\gamma = 1,5$	Приведенная погрешность определена по формуле: $\gamma = \frac{\Delta}{X_N} = q,$ где q – число, выраженное в процентах; X_N – выражено в единицах измеряемой величины
, ,	$\delta = 0,02 + 0,01 \left(\left \frac{X_K}{X} \right - 1 \right)$	Относительная погрешность определена по формуле: $\delta = \frac{\Delta}{X} = c + d \left(\left \frac{X_K}{X} \right - 1 \right),$ где c и d – числа, выраженные в процентах
⊙0,5	$\delta = 1,5$	Относительная погрешность определена по формуле: $\delta = \frac{\Delta}{X} = q,$ где q – число, выраженное в процентах

Проектное задание (70 баллов)

Проводится измерение груза неизвестной массы X с помощью рычажных (аптекарских) весов нулевым методом сравнения с мерой. Нулевой метод заключается в уравнивании неизвестной массы с помощью регулируемой меры, представляющей собой набор гирь известных номиналов. Таким образом результирующий эффект воздействия неизвестной измеряемой величины и величины, воспроизводимой известной мерой на прибор сравнения доводят до нуля.

Измерение проводят в два этапа: на первом этапе помещают неизвестный груз X на одну чашку весов и уравнивают его набором гирь общей массой M_1 . На втором этапе груз X помещают на противоположную чашку весов (там где в первом случае был получен набор гирь M_1) и снова уравнивают его набором гирь общей массой M_2 . При этом оказалось, что $M_1 \neq M_2$. Пусть $M_1 < M_2$, тогда истинное значение M измеряемой массы находится в пределах:

$$M_1 \leq M \leq M_2,$$

тогда, M_1 есть оценка истинного значения M снизу, а M_2 есть оценка истинного значения M сверху.

Объясните полученную разность в результатах этих двух измерений: укажите источник возникновения погрешности. Запишите условия равновесия весов для M_1 и M_2 . Определите погрешности этих результатов в абсолютной и относительной формах.

Предложите формулу для оценки истинного значения M на основе результатов измерений M_1 и M_2 , свободную от этих погрешностей.

Решение сопроводите необходимыми схемами, пояснениями и формулами.