

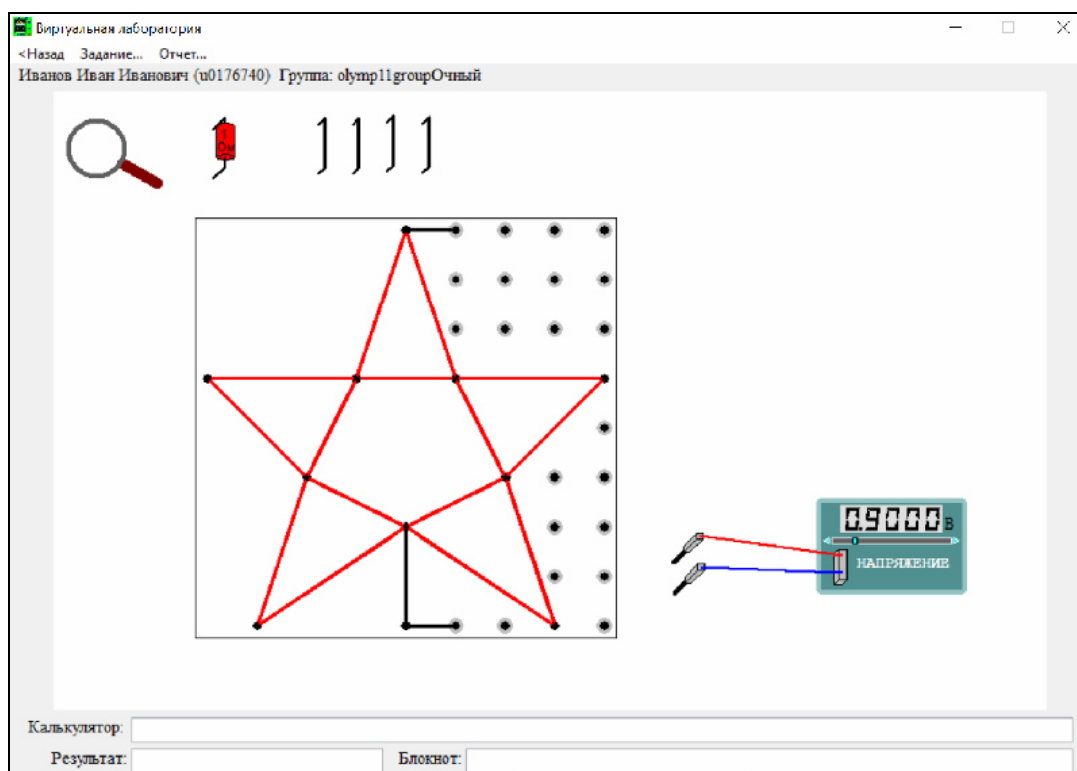
Разбор избранных заданий

Интернет-олимпиады школьников по физике 2024/2025 учебного года

5. Заключительный тур. 11 класс. Олимпиада, модель: Электрическая звезда (30 баллов)

Имеется резистор 1 Ом, панель с гнездами, расположенными на равномерной сетке, источник регулируемого напряжения и провода. Из проводов красного цвета спаяли звезду, впаяв точки соединения в гнезда панели. Индикатор источника напряжения показывает напряжение на его выходных клеммах. Провода одного цвета имеют одинаковое сопротивление на единицу длины. Определите с максимальной возможной точностью:

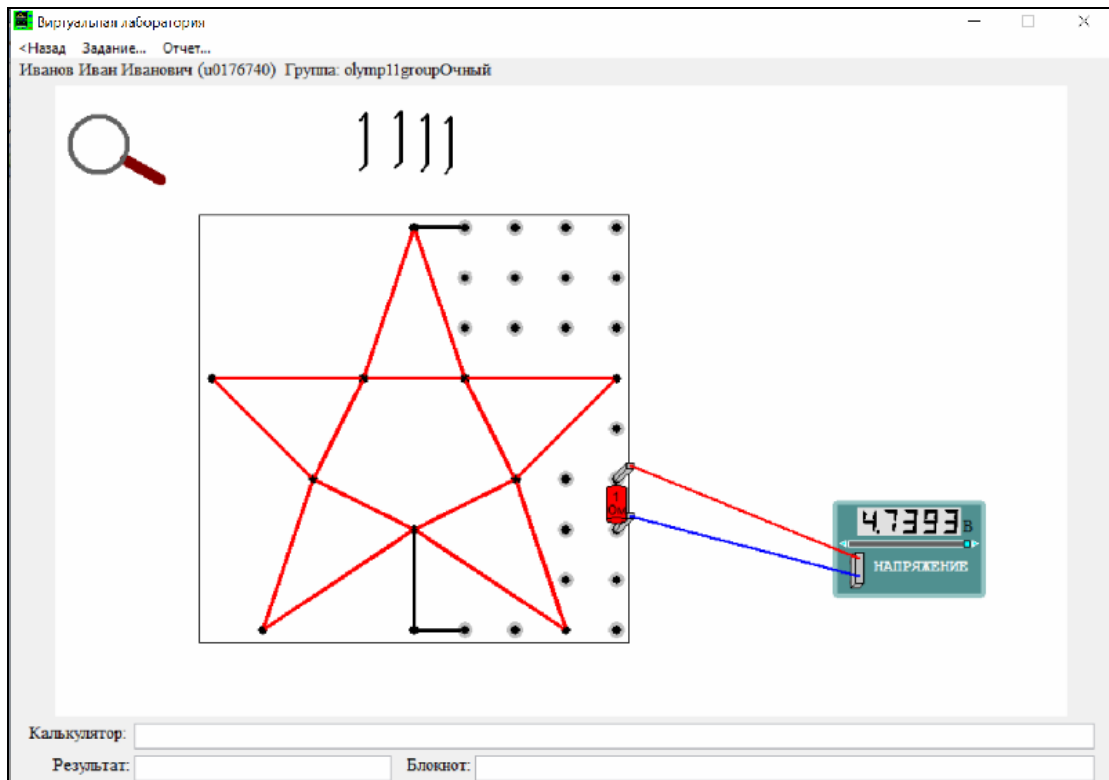
1. Внутреннее сопротивление r источника напряжения.
2. Сопротивление R звезды.
3. Максимальный ток $I_{\max}$ через один провод звезды, который можно получить в данной системе.
4. Максимальный КПД K (в процентах), который можно получить в имеющейся системе, если только внутреннее сопротивление источника снижает полезную нагрузку.
5. Минимальный ненулевой ток $I_{\min}$ через один провод звезды при подсоединении звезды (без использования резистора) к источнику напряжения с максимальным выставленным напряжением.
6. Сопротивление R_1 красного провода длиной в одну ячейку сетки панели.



Решение.

1. Сначала выясним внутреннее сопротивление источника напряжения. Для повышения точности измерений передвинем движок источника напряжения вправо для достижения наибольшего напряжения. Оно оказывается равным $E=5.0000$ В.

Подсоединим источник напряжения к имеющемуся резистору R_0 номиналом 1 Ом.



Получаем на выходе источника напряжение $V_1=4.7393$ В.

Ток через такую цепь $I_1=E/(r+R_0)$,

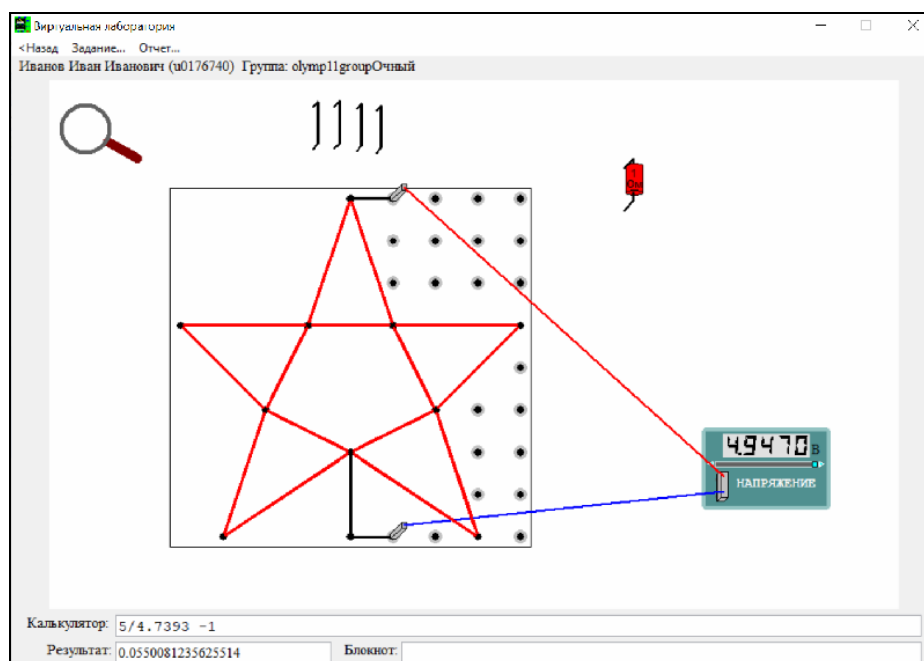
поэтому

$$V_1 = I_1 R_0 = ER_0/(r + R_0) = E/(r/R_0 + 1).$$

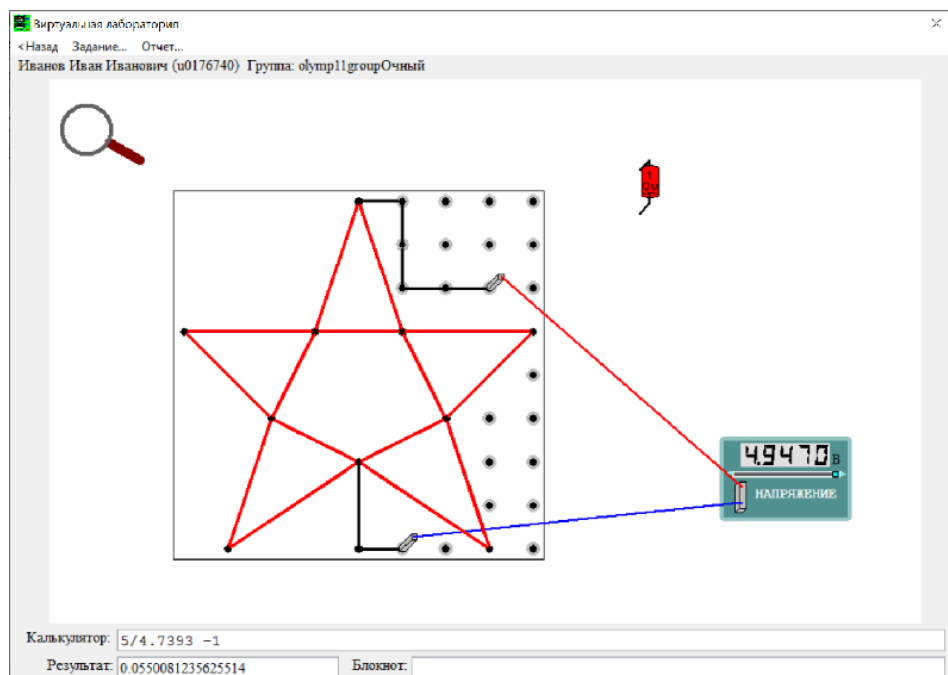
Следовательно,

$$r = R_0(E/V_1 - 1) = 1 \cdot (5/4.7393 - 1) \text{ Ом} = 0.05501 \text{ Ом}.$$

2. Для нахождения сопротивления звезды подсоединим ее к источнику напряжения.



Но перед нахождением сопротивления звезды необходимо проверить, влияет ли на результат сопротивление черных проводов. У нас как раз имеется четыре черных провода. Добавим их последовательно к имеющимся черным проводам, подсоединенным к звезде, и проверим результат.



Напряжение $V_2 = 4.9470$ В на выходе источника при этом не изменилось. Следовательно, влиянием сопротивления соединительных проводов можно пренебречь.

Ток через такую цепь $I_2 = E/(r+R)$, поэтому

$$V_2 = I_2 R = ER/(r+R) = E/(r/R+1).$$

Следовательно,

$$R = r/(E/V_2 - 1) = 0.05501/(5/4.9470 - 1) \text{ Ом} = 5.1346 \text{ Ом}.$$

3. Максимальный ток через звезду, который можно получить в данной системе, будет наблюдаться при используемой схеме подключения и поэтому равен I_2 . Этот ток разделяется через два провода в вершине звезды на две равные части, через левую и через правую половины звезды. Поэтому

$$I_{\max} = I_2/2 = E/(r+R)/2 = 0.4817 \text{ А}.$$

4. КПД схемы равен отношению полезной рассеиваемой мощности к полной рассеиваемой мощности. Если в качестве нагрузки подсоединено сопротивление R_3 , ток через такую цепь $I_3 = E/(r+R_3)$, а напряжение на выходе источника

$$V_3 = E/(r/R_3 + 1) = ER_3/(R_3 + r).$$

При этом полезная мощность $W_3 = (I_3)^2 R_3$, а полная мощность $W = (I_3)^2 (R_3 + r)$. Поэтому

$$\text{КПД} = W_3/W = R_3/(R_3 + r) = V_3/E.$$

Проверим, какое соединение дает наибольшее значение КПД. При отсутствии полезной нагрузки полезная нагрузка отсутствует, поэтому КПД не может быть равным 100%.

При соединении звезды последовательно с резистором 1 Ом напряжение на выходе источника $V_4 = 4.9555 \text{ В}$. При соединении звезды параллельно с резистором 1 Ом напряжение на выходе источника $V_5 = 4.6917 \text{ В}$.

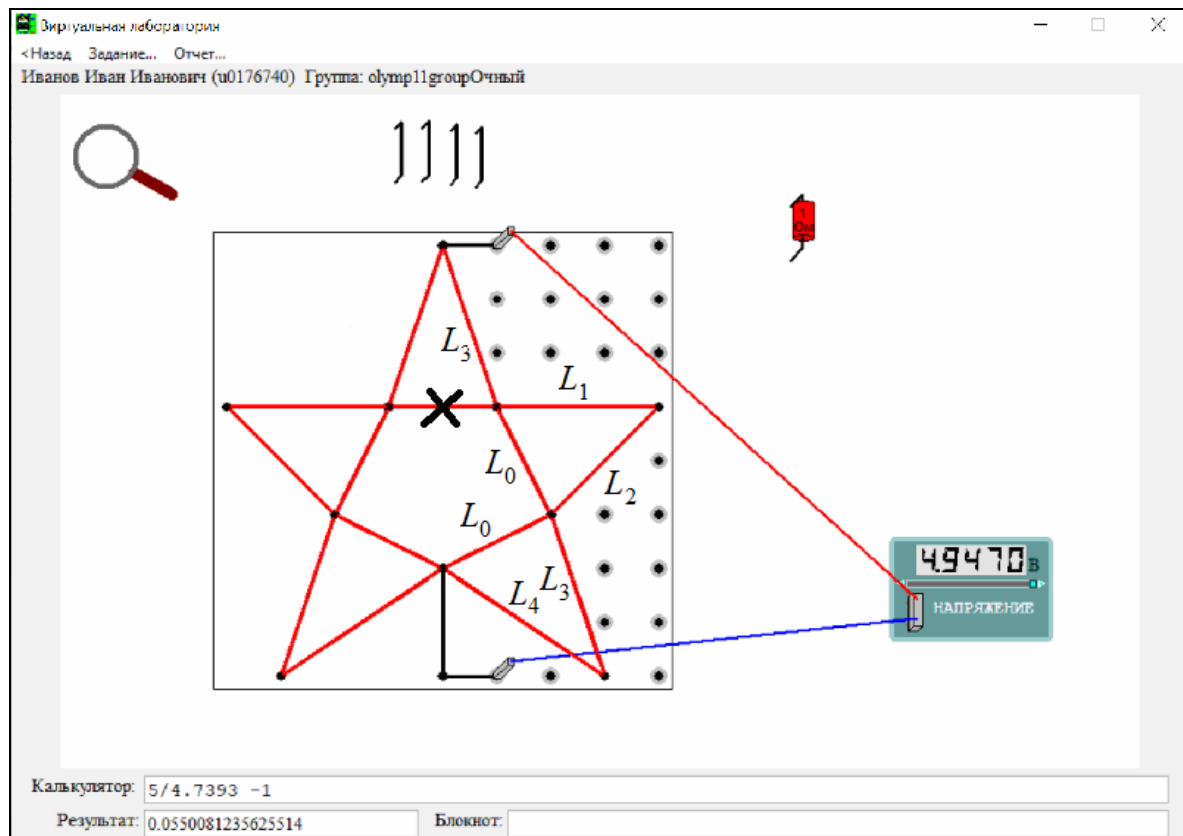
Так как $V_4 > V_2$ и $V_4 > V_5$, максимальный КПД достигается при соединении звезды последовательно с резистором 1 Ом, и значение в процентах

$$K = 100\% V_4/E = 100\% * 4.9555/5 = 99.11\%.$$

5. Звезда симметрична, поэтому через горизонтальный провод в середине звезды ток не идёт. Будем рассматривать протекание тока через правую половину звезды. Он равен $I_{\max} = I_2/2$.

Ток $I_{\max}$ проходит сначала через верхнее правое ребро звезды, затем через подключенные параллельно проводники с длинами L_0 и $L_1 + L_2$ (см. рисунок ниже), а затем через подключенные параллельно проводники с длинами L_0 и $L_3 + L_4$.

Все внутренние проводники в звезде имеют одинаковую длину $L_0 = \sqrt{1^2 + 2^2} L = \sqrt{5} L = 2.2361L$, где L – расстояние между соседними гнездами наборной панели, так как они соответствуют диагоналям прямоугольных треугольников с катетами L и $2L$. Поэтому минимальный ненулевой ток $I_{\min}$ будет протекать через участок с наибольшим сопротивлением, то есть через соединение двух красных проводников с наибольшей длиной – либо через среднюю вершину звезды, для которой длина проводов $L_1 + L_2$, либо через нижнюю вершину звезды, для которой длина проводов $L_3 + L_4$.



Поскольку $L_1=3L$, $L_2=\sqrt{2^2+2^2}L=\sqrt{8}L$, $L_3=\sqrt{1^2+3^2}L=\sqrt{10}L$, $L_4=\sqrt{2^2+3^2}L=\sqrt{13}L$, получаем, что $L_1+L_2=(3+\sqrt{8})L=5.8284L$, и $L_3+L_4=\sqrt{10}L+\sqrt{13}L=6.7678L$.

Следовательно, нам необходимо выбрать вариант с наибольшей длиной $L_3+L_4=6.7678L$.

Таким образом, ток I_{max} проходит сначала через верхнее правое ребро звезды, а затем через подключенные параллельно красные проводники с длинами $L_0=2.2361L$ и $L_3+L_4=6.7678L$.

Красный проводник длиной L по условию имеет сопротивление R_1 . Поэтому проводники с длинами L_3 , L_0 , L_1+L_2 и L_3+L_4 будут иметь сопротивления $r_3=3.1622R_1$, $r_0=2.2361R_1$, $r_{12}=5.8284R_1$ и $r_{34}=6.7678R_1$.

Параллельно включенные резисторы r_0 и r_{34} имеют сопротивление

$$r_{034}=r_0r_{34}/(r_0+r_{34})=1.68077R_1,$$

через которое протекает ток I_{max} . Напряжение на данном участке цепи будет равно

$$V_{012}=I_{max}r_{034}=I_{max}r_0r_{34}/(r_0+r_{34}).$$

Поэтому

$$I_{min}=V_{012}/r_{34}=I_{max}r_0/(r_0+r_{34})=I_{max}/(1+r_{34}/r_0)=0.4817/(1+6.7678/2.236)A=0.1196A.$$

6. Аналогичным образом находим, что

$$r_{012}=r_0r_{12}/(r_0+r_{12})=1.61608R_1.$$

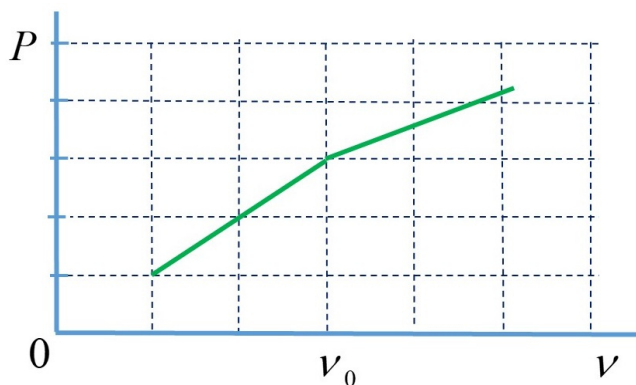
Сопротивление половины звезды в два раза больше, чем измеренное ранее сопротивление R всей звезды. Поэтому

$$2R=r_3+r_{012}+r_{034}=3.1622R_1+1.61608R_1+1.68077R_1=6.459R_1.$$

В итоге находим

$$R_1=2R/6.459=2*5.1346/6.459\text{ Ом}=1.590\text{ Ом}.$$

6. Заключительный тур. 11 класс. Олимпиада, задача: Давление в сосуде с водой и идеальным газом (15 баллов)



Внутри закрытого теплоизолированного сосуда объёмом $V=0.85 \text{ м}^3$ находится некоторое количество воды при температуре $T_0=273\text{К}$. В сосуд добавляют идеальный одноатомный газ при температуре $T_1=244 \text{ К}$. На рисунке схематически показан график зависимости давления, устанавливающегося в сосуде после достижения равновесия, от количества вещества добавленного газа, $\nu_0=36.7$ моль. Будем считать, что добавили именно это количество газа, а испарением воды можно пренебречь. Определите:

1. Массу воды в сосуде (m).
2. На какую величину ($\Delta V = V_{\text{конечный}} - V_{\text{начальный}}$) изменяется объём газа при установлении равновесия.
3. Во сколько раз ($K = P_{\text{конечное}} / P_{\text{начальное}}$) изменилось давление газа в сосуде во время установления равновесия.

Удельная теплота плавления льда $\lambda=333 \text{ кДж/кг}$, универсальная газовая постоянная $R=8.31 \text{ Дж/(моль К)}$, плотность воды $\rho_{\text{в}}=1 \text{ г/см}^3$, плотность льда $\rho_{\text{л}}=0.9 \text{ г/см}^3$. Ответы вводите с точностью до одного процента. Газ не растворяется в воде.

Решение.

1. Обратим внимание на то, что температура поступающего в сосуд газа ниже температуры замерзания воды. При установлении равновесия вода в сосуде будет замерзать.

Даже без строгих вычислений следует ожидать, что изменение зависимости давления в сосуде от количества вещества добавленного газа произойдёт в момент, когда вся вода превратится в лёд при температуре кристаллизации T_0 , а добавленный газ нагреется до температуры T_0 . Поэтому

$$\frac{3}{2}\nu_0 R(T_0 - T_1) = \lambda m \quad (1)$$

Из (1) получаем, что масса воды в сосуде

$$m = \frac{3\nu_0 R(T_0 - T_1)}{2\lambda} = 39.8 \text{ г}. \quad (2)$$

2. Плотность льда меньше плотности воды, поэтому лёд будет занимать больший объём, чем вода, и объём газа в сосуде уменьшится

$$\Delta V = \frac{m}{\rho_{\text{в}}} - \frac{m}{\rho_{\text{л}}} = -4.42 \text{ см}^3. \quad (3)$$

3. Воспользуемся уравнением Клапейрона-Менделеева и вычислим отношение конечного объёма газа к начальному:

$$K = \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_0}{T_1} \frac{V - m / \rho_{\text{в}}}{V - m / \rho_{\text{л}}} = 1.12 . \quad (4)$$

4. **Задача решена**, но для желающих подробнее разобраться в происходящих процессах приведём формулы зависимости давления в сосуде от количества вещества добавленного газа.

На первом этапе в процессе установления равновесия газ в сосуде нагревается до температуры T_0 за счёт того, что часть воды превращается в лёд при температуре T_0

$$m_{\text{л}} = \frac{3\nu R(T_0 - T_1)}{2\lambda} . \quad (5)$$

Давление в сосуде определим, воспользовавшись уравнением Клапейрона-Менделеева

$$P_1' \left(V - \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}} - \frac{m - m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} \right) = \nu R T_0 . \quad (6)$$

Из (5) и (6) получаем

$$P_1' = \frac{\nu R T_0}{V - \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}} - \frac{m - m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}} = \frac{\nu R T_0}{V - \frac{m}{\rho_{\text{в}}} - \frac{3R(T_0 - T_1)(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{2\lambda\rho_{\text{л}}\rho_{\text{в}}}} . \quad (7)$$

Заметим, что множитель перед ν в последнем слагаемом в знаменателе на несколько порядков меньше V . Если объём сосуда значительно больше объёма находящейся в нём воды, эта зависимость является практически линейной.

На втором этапе вся вода превращается в лёд, при этом лёд и газ в процессе установления равновесия приобретают

$$\text{одинаковую температуру } T_x < T_0 , \quad (8)$$

$$\frac{3}{2} \nu R T_1 + \lambda m + C_{\text{льда}} m (T_0 - T_x) = \frac{3}{2} \nu R T_x , \quad (9)$$

$$T_x = \frac{\frac{3}{2} \nu R T_1 + \lambda m + C_{\text{льда}} m T_0}{\frac{3}{2} \nu R + C_{\text{льда}} m} . \quad (10)$$

Зависимость давления от количества вещества поступившего в сосуд газа

$$P_2' = \frac{\nu R T_x}{V - \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}}} . \quad (11)$$

Сравнивая (11) и (7) с учётом (8) для случая, когда объём сосуда много больше объёма воды, замечаем, что эта зависимость тоже практически линейна, но с меньшим угловым коэффициентом. Это и показано на графике.