Задача A. Сумки для тура

Предположим, что по завершении операций все числа равны x. Поскольку сумма трех чисел всегда увеличивается на два в каждой операции, общее количество операций равно $\frac{3\cdot x-(a+b+c)}{2}$. Таким образом, мы хотим минимизировать x.

Пусть m — максимум из a, b, c. Поскольку мы никогда не можем уменьшать числа, то должно выполняться условие $m \leqslant x$. Кроме того, поскольку мы никогда не сможем изменить четность суммы трех целых чисел, должно выполняться $3 \cdot x \equiv a + b + c \pmod 2$.

Следовательно, если $3 \cdot m \equiv a + b + c \pmod 2$, то $x = m$, иначе $x = m + 1$. Осталось вычислить $\frac{3\cdot x-(a+b+c)}{2}$.

Задача B. Заработок на концертах

Переформулируем условие: нужно выбрать два числа из массива a, у которых НОД будет наибольшим среди всех пар.

Заметим, что НОД, который является ответом, будет делителем каких-то двух чисел. Найдем все делители у каждого числа в массиве. Пусть d_i — это множество всех делителей числа a_i. Тогда ответом к задаче будет наибольшее число, которое есть в двух множествах.

Для того чтобы его найти, посчитаем, сколько раз встречается каждое число во всех множествах (с помощью dict/map или сортировки подсчетом). Среди чисел, которые встречаются хотя бы два раза, выбираем максимальное — это и будет ответом.

Задача C. Обложка для нового альбома

Подзадачи 1 и 3

Рассмотрим покраску $(x; y)$ клетки: данная клетка входит максимум в 9 квадратов. Перечислим координаты центров квадратов:

- $(x - 1; y - 1)$
- $(x; y - 1)$
- $(x + 1; y - 1)$
- $(x - 1; y)$
- $(x; y)$
- $(x + 1; y)$
- $(x - 1; y + 1)$
- $(x; y + 1)$
- $(x + 1; y + 1)$

Создадим двумерные массивы $color$ и $square$. В $color[i][j]$ будем помечать, в какой цвет будет покрашена клетка: 0 — белый, 1 — черный. В $square[i][j]$ будет количество покрашенных в черный цвет клеток в квадрате с центром $(i; j)$.

Если надо покрасить $(x; y)$ клетку, то изменим значение в $color[x][y]$. Для пересчета значений в $square$ пройдемся по центрам квадратов, в которые входит точка $(x; y)$, и изменим значения.

Для подсчета количества клеток со значением $0, 1, 2, \ldots, 9$ воспользуемся массивом cnt. До покраски всего белых клеток было $(h - 2) \cdot (w - 2)$, сохраним это значение в $cnt[0]$. Во время пересчета массива $square$ пересчитываем значения в cnt.

Так как перекрашиваем клетку, то в квадрате с центром $(toX; toY)$ количество покрашенных клеток изменится.

$cnt[square[toX][toY]] = cnt[square[toX][toY]] - 1$ — вычитаем 1, так как это значение квадрата до изменения.

$cnt[square[toX][toY]] = cnt[square[toX][toY]] + 1$ — прибавляем 1, так как это значение квадрата после изменения.

После операции выводим массив cnt.

Основное решение

Для решения задачи на полный балл вместо массивов $color$ и $square$ воспользуемся словарем, то есть $map/dict$.

Задача D. Edge-flip

Давайте немного переформулиуем условие. Скажем, что если на обоих концах дороги нет картелей, то применение операции к данной дороге «создает» картели на обоих ее концах. Несложно заметить, что такая формулировка эквивалентна исходной. Тогда задачу можно переформулировать так: дано дерево, в котором каждая вершина покрашена либо в белый, либо в черный цвет. За одну операцию можно выбрать ребро и поменять цвет у вершин на его концах.

В такой формулировке становится очевидно, что порядок операций неважен, а также то, что применять операцию к одному и тому же ребру бесполезно. Отсюда следует, что если решение существует, то состоит из не более чем $n-1$ операции. Эта идея приводит к решению с асимптотикой $O(2^n \cdot n)$, которое заключается в том, чтобы перебрать все возможные варианты (которых $O(2^n)$, так как каждое ребро либо было использовано один раз, либо не было использовано вовсе). Это решение проходит первые две подгруппы и набирает 30 баллов.

Заметим, что каждая операция не меняет четность количества черных вершин. Поскольку необходимо получить 0 черных вершин (а ноль — это четное число), то и изначальное количество вершин должно быть четным. Иначе, ответ -1. Эта идея позволяет решить подгруппу, где k нечетное.

Оказывается, что если количество черных вершин четно, то ответ всегда сущестует. Для его построения посмотрим на произвольный лист дерева. Если он белый, то просто удалим его из дерева. Иначе применим операцию к единственному ребру, инцидентному данному листу. После чего лист станет белым. Удалим его. Таким образом, задача свелась к меньшей. В конце концов от дерева останется только корень, который обязательно будет покрашен в белый цвет. Асимптотика решения $O(n)$.

Задача E. Новый тур

Подзадача 1

Давайте проанализируем, какая асимптотика вычисления сумм для каждого начального города.

Если начнем тур с первого города, то просуммируем все оклады. Если начнем тур со второго города, то просуммируем все оклады на четных позициях. Если начнем тур с третьего города, то просуммируем все оклады на позициях кратных трëм.

Продолжая данный процесс, общее количество действий, которые мы сделаем, равно $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \ldots + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n} = n \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n})$.

Пусть s_i сумма окладов, если начнем в i-м городе. Сумма дробей известна как сумма гармонического ряда, и она составляет приблизительно $\log_2(n)$, поэтому количество действий для вычисления сумм составляет около $n \cdot \log_2(n)$.

Для каждого предположения будем пересчитывать сумму, тогда сложность равна $O(m \cdot n \cdot \log_2(n))$.

Подзадача 2

Если группа позвонит меру города с номером p, то это повлияет на элементы массива s, у которых номер позиции является делителем p.

Предподсчитаем массив s, тогда для каждого предположения просто проходим по вычисленным суммам и находим максимальную. Асимптотика $O(m \cdot n + n \cdot \log_2(n))$

Подзадача 3

Воспользуемся ограничением на $q \geqslant 0$, так как это повлияет только на элементы массива s, у которых номер позиции является делителем p.

Предподсчитаем для каждого p максимальное значение среди элементов массива s, у которых номер позиции является делителем p. Пусть это массив $maxSum$.

Тогда ответом будет $maxSum_p + q$ или максимумом среди элементов массива s, у которых номер позиции не является делителем p. Так как $q \geqslant 0$, то элементы массива s на позициях, которые являются делителями p, только увеличатся. Следовательно, ответом будет $maxSum_p + q$ или максимум среди элементов массива s, то есть $\max(maxSum_p + q, \max_{i=1} n(s_i))$. Асимптотика решения $O(n \cdot \log_2(n) + m)$.

Подзадача 4

В данной подзадаче уже нет ограничений на q. Так как q может быть отрицательным, то отличие от подзадачи 3 в том, что нужно искать максимум среди элементов массива s, позиции которых не делятся на p.

Возможно, самый простой способ — это использовать RMQ. Для фиксированного p обозначим делители с помощью $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = p$. Тогда максимум среди элементов массива s, позиции которых не делятся на p, является максимумом максимумов следующих подмассивов: $\max\limits_{i \in [d_1+1 \ldots d_2-1]} s_i$, $\max\limits_{i \in [d_2+1 \ldots d_3-1]} s_i$, $\ldots$, $\max\limits_{i \in [d_{k-1}+1 \ldots d_k-1]} s_i$, $\max\limits_{i \in [d_k+1 \ldots n]} s_i$.

Построим на массиве s структуру данных для нахождения максимума на отрезке: дерево отрезков или разряженную таблицу. Оценим, сколько запросов для фиксированного p будет сделано — этим значением будет количество делителей p. Количество делителей числа ограничено сверху $2 \cdot \sqrt[3]{n}$ для чисел меньших 10^{18}. Для каждого числа от 1 до n предподсчитаем все делители с помощью решета Эратосфена. Асимптотика решения с использованием разряженной таблицы $O(n \cdot \log_2(n) + m \cdot \sqrt[3]{n})$.

Подзадача 5

Для каждого числа p от 1 до n предподсчитаем максимум среди элементов массива s, позиции которых не делятся на p. Асимптотику предподсчета для фиксированного p равна $O(\sqrt[3]{n})$. Так как надо посчитать для каждого числа от 1 до n, то асимптотика будет $O(n \cdot \sqrt[3]{n})$. При $n < m$ данная идея будет работать быстрее. Асимптотика решения с разряженной таблицей равна $O(n \cdot log_2(n) + n \cdot \sqrt[3]{n} + m)$.