8 класс

8.1 Шаровое скопление

Шаровое звёздное скопление состоит из 100 тысяч звёзд, причём среднее расстояние между соседними звёздами составляет 0.3 парсека. Считая, что звёзды в скоплении распределены однородно, определите видимый угловой диаметр скопления при наблюдении с расстояния 4 килопарсека. Где в нашей Галактике располагаются такие объекты?

Возможное решение. Сначала определим радиус скопления, для чего найдём его объём. Среднее расстояние между звездами скопления $l = 0.3$ пк, тогда в среднем на каждую звезду приходится $l^3 \sim (0.3\ \text{пк})^3 = 0.027\ \text{пк}^3$. Полный объём скопления

$$V = 27 \cdot 10^{-3}\ \text{пк}^3 \times 10^5 = 2700\ \text{пк}^3.$$

Считая скопление шаром, оценим его радиус:

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3 \quad \Longrightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 8.6\ \text{пк}.$$

Величина получилась заниженная, что неудивительно, поскольку в настоящих шаровых скоплениях звёзды распределены неоднородно, внешние части заметно разрежённее ядра. Тем не менее, по нашим расчётам диаметр скопления оказывается равным 17.2 пк.

Определим, под каким углом скопление видно с расстояния 4 кпк. В случае, когда размеры наблюдаемого объекта гораздо меньше расстояния до него, угловые размеры прямо пропорциональны линейным и обратно пропорциональны расстоянию до объекта. Известно, что отрезок длиной 1 а. е. с расстояния 1 пк = 206 265 а. е. наблюдается под углом 1″. Тогда угловой диаметр скопления

$$1'' \times \frac{17.2\ \text{пк}}{1\ \text{а. е.}} \times \frac{1\ \text{пк}}{4 \cdot 10^3\ \text{пк}} = 1'' \times \frac{17.2\ \text{пк}}{4 \cdot 10^3\ \text{пк}} \times \frac{1\ \text{пк}}{1\ \text{а. е.}} = 206\,265'' \times \frac{17.2}{4 \cdot 10^3} = 887'' \approx \mathbf{15'}.$$

Шаровые звёздные скопления — одни из наиболее старых объектов в Галактике. Они расположены в сфероидальных структурных компонентах: **в гало** и в центральном утолщении — **балдже.**

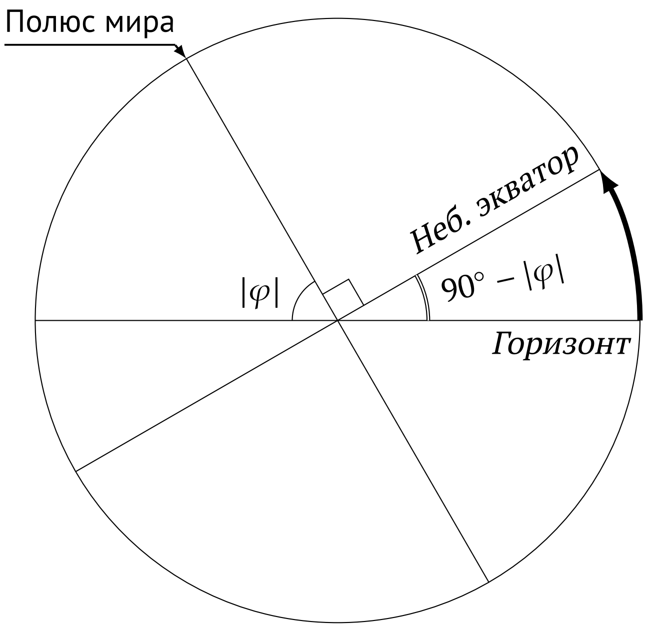
Критерии оценивания:

а1	Оценка объёма V скопления (допустимо оценивать приходящийся на звезду средний объём с коэффициентом $[0.5;\ 5]$ при l^3).		2
	Арифметическая ошибка	*−1*	
а2	Вычисление радиуса R или диаметра скопления ***исходя из полученного участником значения*** объёма		2
	Арифметическая ошибка	*−1*	
а3	Вычисление углового диаметра скопления ***исходя из полученного участником значения*** радиуса (диаметра)		3
	Арифметическая ошибка	*−1*	
	Перепутаны радиус и диаметр	*−1*	
б1	Верное указание ***хотя бы одного*** из возможных местоположений (в т. ч. в форме описания, например, «вблизи центра Галактики»)		1
	Всего		**8**

8.2 Два города

Юные любители астрономии Алиса и Базилио наблюдают одну и ту же звезду. Алиса заметила, что звезда находится над горизонтом ровно половину звёздных суток. Базилио определил, что наибольшая высота звезды над горизонтом — всего 21°, и достигается она ровно в тот момент, когда в городе Алисы звезда заходит. Определите координаты пункта, в котором находится Базилио, если Алиса живёт в городе с координатами 54° с. ш., 123° в. д. Атмосферной рефракцией пренебрегите.

Возможное решение. Алиса находится не на экваторе, поэтому из утверждения о том, что звезда половину суток находится над горизонтом, заключаем, что звезда расположена на небесном экваторе, её склонение равно нулю.



Как известно и как нетрудно показать, высота наивысшей точки небесного экватора над горизонтом равна $90° - |\varphi|$. Зная, что для Базилио наибольшая высота звезды составляла 21°, находим возможные широты:

$$\varphi_{\text{Б}} = \pm(90° - 21°) = \mathbf{\pm 69°},$$

то есть 69° с. ш. или 69° ю. ш.

Экваториальная звезда для любого наблюдателя находится над горизонтом ровно половину звёздных суток — 12 звёздных часов. От момента достижения максимальной высоты (верхней кульминации) до захода проходит четверть суток — 6 звёздных часов.

Сопоставляя наблюдения, приходим к выводу, что разность долгот Алисы и Базилио составляет 6 часов, то есть 90°. При этом Базилио находится западнее, поскольку для него звезда кульминирует позже, чем для Алисы. Долгота Базилио

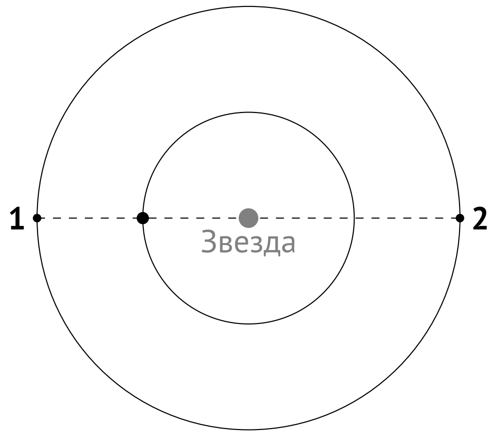
$$\lambda_Б = 123° - 90° = \mathbf{33°\ в.\,д.}$$

Критерии оценивания:

а1	Звезда находится на небесном экваторе		1
а2	Высота наивысшей точки небесного экватора на широте φ (результат без модуля также засчитывается)		1
а3	Возможные значения широт Базилио $\varphi_Б$		2
	Потерян один из случаев	*−1*	
	Арифметическая ошибка	*−1*	
б1	Разность долгот Базилио и Алисы		2
б2	Базилио западнее Алисы		1
б3	Долгота Базилио $\lambda_Б$		1
	Всего		**8**

8.3 В одну линию

Наблюдая некоторую звезду, астрономы обнаружили, что в определённый момент времени произошёл «парад планет»: центры звезды и трёх обращающихся вокруг неё экзопланет оказались на одной прямой (по одну сторону от звезды). Проведя расчёты, учёные пришли к выводу, что в следующий раз центры звезды и планет А и Б снова окажутся на одной прямой ровно через 10 лет. Аналогичное событие для пары планет А и В произойдёт через 12 лет. Как скоро после «парада планет» совпадут направления от звезды к планетам Б и В? Считайте, что планеты обращаются вокруг звезды в одной плоскости и в одном направлении.



Возможное решение. Рассмотрим движение внешней планеты в системе отсчёта, вращающейся вокруг звезды вместе с внутренней планетой. Когда центры звезды и планет оказываются на одной линии, внешняя планета по отношению к внутренней находится либо в противостоянии (1), либо в соединении (2).

Во время «парада планет» каждая пара планет находилась в положении 1. Планеты А и Б переходят от положения 1 к положению 2 за 10 лет, то есть за 10 лет внутренняя планета как более быстрая обгоняет внешнюю на 180° (половину оборота), а за $S_{\text{АБ}} = 20$ лет — на один оборот; при этом неизвестно, какая из планет А и Б внешняя, а какая — внутренняя.

Пусть $T_{\text{А}}$ и $T_{\text{Б}}$ — периоды обращения планет А и Б соответственно. Тогда

$$\frac{S_{\text{АБ}}}{T_{\text{А}}} - \frac{S_{\text{АБ}}}{T_{\text{Б}}} = \pm 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{T_{\text{А}}} - \frac{1}{T_{\text{Б}}} = \pm\frac{1}{S_{\text{АБ}}}.$$

Для пары планет А и В аналогичным образом приходим к выражению

$$\frac{1}{T_{\text{А}}} - \frac{1}{T_{\text{В}}} = \pm\frac{1}{S_{\text{АВ}}},$$

где $S_{\text{АВ}} = 12$ лет $\times\, 2 = 24$ года.

Кроме того, для интересующей нас пары Б и В

$$\frac{1}{T_{\text{Б}}} - \frac{1}{T_{\text{В}}} = \pm\frac{1}{S_{\text{БВ}}}.$$

Заметим, что

$$\left(\frac{1}{T_\text{А}} - \frac{1}{T_\text{В}}\right) - \left(\frac{1}{T_\text{А}} - \frac{1}{T_\text{Б}}\right) = \frac{1}{T_\text{Б}} - \frac{1}{T_\text{В}} = \boxed{\pm\frac{1}{S_\text{АВ}} \mp \frac{1}{S_\text{АБ}} = \pm\frac{1}{S_\text{БВ}}},$$

причём в последнем выражении знаки плюс-минус (минус-плюс) независимы и отражают отношения порядка между $T_\text{А}$, $T_\text{Б}$ и $T_\text{В}$. Поскольку заведомо $S_\text{БВ} > 0$,

$$S_\text{БВ} = \left|\frac{1}{S_\text{АВ}} \pm \frac{1}{S_\text{АБ}}\right|^{-1} = \left[\begin{array}{l} \frac{120}{11} \text{ года} \approx 10.9 \text{ года}, \\ 120 \text{ лет}^\dagger. \end{array}\right.$$

Заметим, что направления от звезды к планетам Б и В совпадут как раз при условии, что одна из этих планет обгонит другую на оборот, то есть через промежуток времени $S_\text{БВ}$ после «парада планет»: **10.9 или 120 лет.**

Критерии оценивания:

а1	Две планеты и звезда располагаются на одной прямой ***в двух разных конфигурациях***	1
а2	За указанные в условии периоды одна из планет в паре обгоняет другую на половину оборота ***либо*** периоды между одинаковыми конфигурациями в паре планет — 20 и 24 года для (А, Б) и (А, В)	1
б1	Связь между синодическим периодом $S_\bullet$ и периодами обращения $T_\bullet$ ***либо*** аналогичное уравнение	2
б2	Связь между синодическими периодами $S_\bullet$ всех трёх планет ***либо*** аналогичное уравнение	2
б3	Ответы (возможные значения синодического периода $S_\text{БВ}$) *Потерян один из случаев*	2 *−1*
	Всего	**8**

Примечание. При потере одного из случаев ***на этапе формул*** суммарная оценка за критерии б1 – б3 не может превышать 3 баллов.

† Для сомневающихся предъявим для каждого из обнаруженных случаев возможный набор значений периодов планет:

$$T_\text{А} = 20 \text{ лет}, \quad T_\text{Б} = 10 \text{ лет}, \quad T_\text{В} = 120 \text{ лет};$$
$$T_\text{А} = 15 \text{ лет}, \quad T_\text{Б} = 60 \text{ лет}, \quad T_\text{В} = 40 \text{ лет}.$$

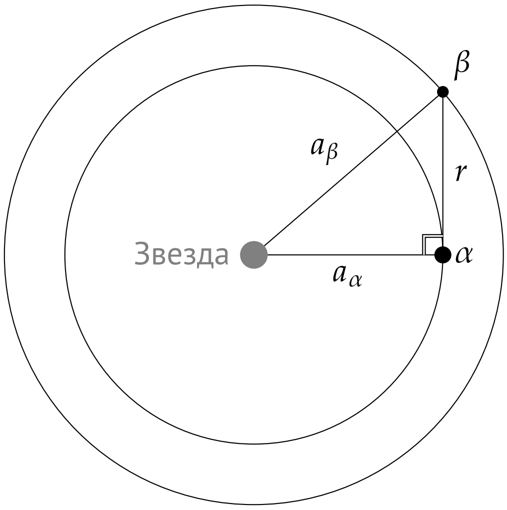
8.4 Две планеты

Вокруг звезды солнечной массы по круговым орбитам обращаются планеты Альфа и Бета с периодами обращения 4.00 и 6.00 года соответственно. Радиус Альфы равен 5 тыс. км, Беты — 12 тыс. км. Плоскости орбит совпадают, а оси вращения планет им перпендикулярны. Радиолокацию Беты проводят в день, когда на экваторе Альфы восход планеты происходит за четверть суток до восхода звезды.

а) Сколько времени пройдет между отправкой и приёмом сигнала в обсерватории на экваторе Альфы?

б) Какова фаза Альфы при наблюдении с Беты в этот момент (в процентах)?

Возможное решение. Поскольку Бета восходит за четверть суток до звезды, угол между Бетой и звездой для наблюдателя на Альфе составляет 90°. Иными словами, Бета находится в квадратуре, а треугольник Бета – Альфа – звезда прямоугольный.



Для определения продолжительности радиолокации необходимо определить расстояние между планетами. Для этого сперва определим радиусы орбит планет. Масса звезды равна массе Солнца, поэтому возможно применить третий закон Кеплера в простой формулировке:

$$\left(\frac{T}{1\text{ год}}\right)^2 = \left(\frac{a}{1\text{ а. е.}}\right)^3 \quad \longrightarrow \quad a = (T\ [\text{в годах}])^{2/3}\text{ а. е.}$$

Получаем радиус орбиты Альфы $a_\alpha = 2.52$ а. е., Беты — $a_\beta = 3.30$ а. е.

Расстояние между планетами определяем по теореме Пифагора:

$$r = \sqrt{a_\beta^2 - a_\alpha^2} = \sqrt{3.30^2 - 2.52^2}\ (\text{а. е.}) \simeq 2.13\ \text{а. е.}$$

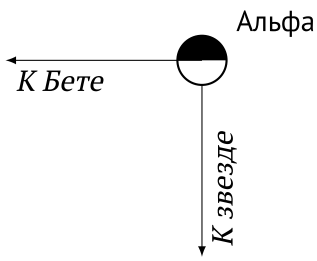
Сигнал должен преодолеть это расстояние дважды: по пути к Бете и обратно, всего

$$2 \times 2.13\ \text{а. е.} = 4.26\ \text{а.е} = 6.37 \cdot 10^8\ \text{км}.$$

Радиосигнал, двигаясь со скоростью света, преодолевает такой путь за

$$\frac{6.37 \cdot 10^8\ \text{км}}{3 \cdot 10^5\ \text{км/с}} = 2.1 \cdot 10^3\ \text{с} = \mathbf{35\ мин.}$$

Угол между направлениями на Бету и звезду для наблюдателя на Альфе прямой, поэтому наблюдатель на Бете видит ровно половину освещённой поверхности Альфы — её фаза равна **50 %.**



Критерии оценивания:

а1	Угол звезда – Альфа – Бета прямой	1
а2	Третий закон Кеплера ***либо*** уравнение кругового движения, связывающее периоды обращения и радиусы орбит	1
а3	Радиусы орбит a_α и a_β	1 + 1
а4	Выражение для расстояния между планетами	1
а5	Ответ для продолжительности радиолокации	2
	Потерян коэффициент 2 («туда–обратно»)	*−1*
	Неверная скорость радиосигнала	*−1*
	Арифметическая ошибка	*−1*
б1	Фаза ***в процентах***	1
	Всего	**8**

8.5 Мишки на севере

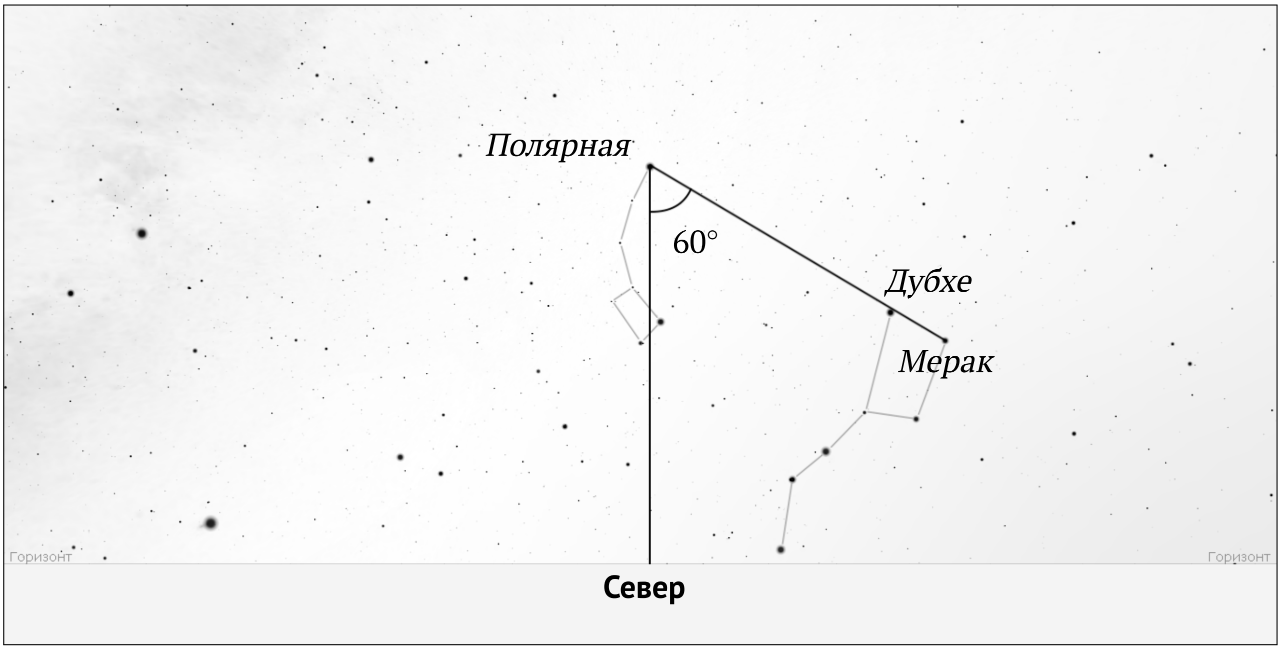
Известно, что 22 сентября в 23 часа по местному времени линия, проведённая через крайние звезды «ковша» Большой Медведицы, от Мерака к Дубхе, указывает на Полярную, а от Дубхе к Мераку — упирается точно в точку севера. Какому моменту соответствует приведённое изображение симуляции звёздного неба:

а) на тот же день (22 сентября);

б) на 21 декабря?

Возможное решение. Линия Мерак – Дубхе всегда указывает на Полярную звезду, расположенную около Северного полюса мира, вокруг которого происходит видимое суточное вращение звёзд. Эту линию возможно использовать в качестве аналога стрелки часов.

В начальный момент времени линия Полярная – Дубхе – Мерак расположена вертикально и пересекается с горизонтом в точке севера. Находим на рисунке «ковши» Большой и Малой Медведицы, отмечаем на рисунке новое положение линии Полярная – Дубхе – Мерак, а также вертикальную линию от Полярной к точке севера.



Если смотреть на Полярную звезду, вращение небесной сферы происходит против часовой стрелки. Измеряем получившийся угол поворота — это можно сделать любым способом, например, непосредственно с помощью транспортира или воспользовавшись какими-либо геометрическими построениями (например, можно вспомнить о свойствах прямоугольного треугольника, у которого один из катетов в 2 раза короче гипотенузы). Получаем, что небесная сфера повернулась на 60°.

Рассмотрим ситуацию, когда действие происходит внутри одного дня (22 сентября). Полный оборот небесной сферы в 360° соответствует примерно 24 часам. За 1 час небесная сфера поворачивается на 360/24 = 15°. С начального момента прошло около 60/15 = 4 часов. Местное время составляет 23 + 4 = **3 часа ночи**.

Что изменится через 3 месяца, 21 декабря? Теперь придётся учесть, что солнечные сутки слегка длиннее звёздных из-за движения Земли по орбите вокруг Солнца. В звёздных сутках 23 ч 56 мин 04 с, поэтому любое конкретное расположение звёзд относительно горизонта на следующий день повторяется на 3 минуты 56 секунд *раньше,* чем в предыдущий. За год накапливается расхождение на целые сутки. Соответственно, за 3 месяца = 1/4 года расхождение составит 1/4 суток = 6 часов, то есть 21 декабря приведённое изображение соответствует 23 + 4 – 6 = **21 часу**.

Критерии оценивания:

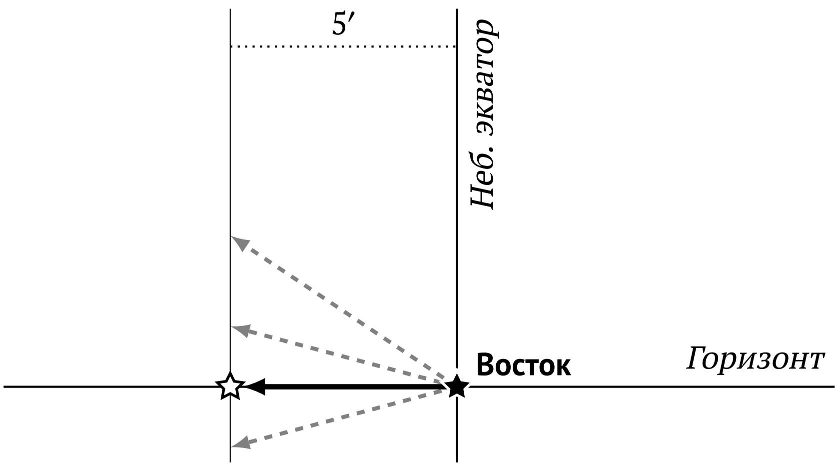
а1	Метод измерения угла поворота небесной сферы: ***что*** измеряем и ***как***	2
а2	Величина угла поворота $[55°;\ 65°]$	1
а3	Угловая скорость вращения небесной сферы ***либо*** иное соотношение между углом поворота и временем (без учёта различия между солнечными и звёздными сутками)	1
а4	Ответ для 21.09 ***исходя из полученного участником значения*** угла (допустимая погрешность — 15 минут)	1
	Неверное направление вращения небесной сферы	*−1*
б1	Накопленная разница между солнечным и звёздным временем (допустимая погрешность — 15 минут)	2
б2	Ответ для 21.12 ***исходя из полученных участником значений***	1
	Учёт накопленной разницы с неверным знаком	*−1*
	Всего	**8**

8.6 Летящая звезда

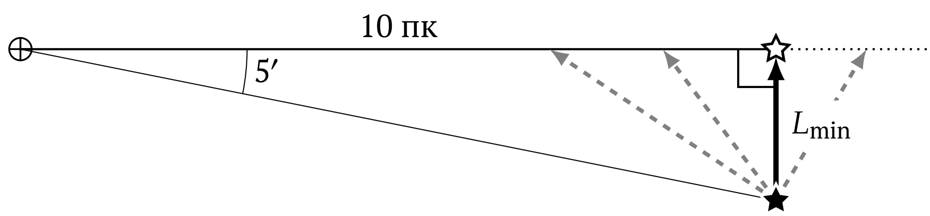
100 лет назад звезда восходила точно в точке востока, а в настоящее время для экваториального наблюдателя она восходит в точке с астрономическим азимутом $269^\circ\,55'$. Оцените наименьшую возможную скорость звезды относительно Солнца, если в настоящее время расстояние до неё составляет 10 парсеков. Считайте, что изменение экваториальных координат (склонения и прямого восхождения) светила обусловлено только его собственным движением.

Возможное решение. Астрономический азимут точки востока — ровно 270°, откуда сделаем вывод, что за 100 лет азимут точки восхода звезды изменился на $5'$.

На земном экваторе суточные параллели светил образуют с горизонтом прямой угол, поэтому смещение звезды на небе составило не менее $\ell_{\min} = 5'$:



Определим минимальное расстояние $L_{\min}$, которое звезда должна была пройти за 100 лет, чтобы её угловое смещение составило $\ell_{\min}$. В оптимальном случае перемещение происходит перпендикулярно лучу зрения:



$$L_{\min} = 10\ \text{пк} \times \operatorname{tg} \ell_{\min} = 0.0145\ \text{пк} = 3000\ \text{а. е.} = 4.5 \cdot 10^{11}\ \text{км}.$$

Поскольку угол $\ell_{\min}$ мал, можно провести расчёт и без использования тригонометрии. Длина отрезка $L_{\min}$ оценивается как длина соответствующей дуги:

$$L_{\min} \approx 2\pi \times 10 \text{ пк} \times \frac{5'}{360^\circ} = 0.0145 \text{ пк}.$$

В результате имеем наименьшую возможную скорость звезды

$$v_{\min} = \frac{L_{\min}}{100 \text{ лет}} = \mathbf{30\ а.\,е./год} = \frac{4.5 \cdot 10^{11} \text{ км}}{100 \times 365.25 \times 86400 \text{ с}} = \mathbf{142\ км/с.}$$

Впрочем, возможно было и сразу связать тангенциальную скорость и собственное движение звезды ($5' = 300''$), зная, что $1 \text{ пк} \times 1'' = 1$ а. е.:

$$v_{\min} = \frac{10 \text{ пк} \times 300''}{100 \text{ лет}} = 30 \text{ а. е./год}.$$

Критерии оценивания:

1	Величина изменения азимута	1
2	Минимальное угловое смещение $\ell_{\min}$	2
3	Минимальное расстояние $L_{\min}$	3
4	Наименьшая возможная скорость звезды $v_{\min}$ ***(в любых единицах)***	2
	Всего	**8**

Справочные данные

Некоторые основные физические и астрономические постоянные

Гравитационная постоянная	G	$= 6.674 \cdot 10^{-11}$ м$^3 \cdot$ кг$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$
Скорость света в вакууме	c	$= 2.998 \cdot 10^{8}$ м/с
Масса протона	m_p	$= 1.673 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса электрона	m_e	$= 9.109 \cdot 10^{-31}$ кг
Астрономическая единица	1 а. е.	$= 1.496 \cdot 10^{11}$ м
Парсек	1 пк	= 206 265 а. е. $= 3.086 \cdot 10^{16}$ м

Данные о Солнце, Земле и Луне

Светимость Солнца	$L_\odot$	$= 3.88 \cdot 10^{26}$ Вт
Видимая звёздная величина Солнца	$m_\odot$	$= -26.8^{\mathrm{m}}$
Эффективная температура Солнца	$T_{\odot,\,\mathrm{eff}}$	$= 5.8 \cdot 10^{3}$ К
Поток энергии на расстоянии Земли	$E_\odot$	$= 1.4 \cdot 10^{3}$ Вт/м^2
Тропический год		= 365.24219 сут.
Средняя орбитальная скорость		= 29.8 км/с
Звёздные сутки		= 23 ч 56 мин 04 с
Наклон экватора к эклиптике	ε	$= 23.44^\circ$
Сидерический месяц		= 27.32 сут.
Синодический месяц		= 29.53 сут.
Видимая звёздная величина полной Луны	$m_☾$	$= -12.7^{\mathrm{m}}$

Характеристики Солнца, планет Солнечной системы и Луны

		Радиус орбиты, а. е.	Орбитальный период	Масса, кг	Радиус, 10^3 км	Осевой период
☉	Солнце			$1.989 \cdot 10^{30}$	697	25.38 сут.
☿	Меркурий	0.3871	87.97 сут.	$3.302 \cdot 10^{23}$	2.44	58.65 сут.
♀	Венера	0.7233	224.70 сут.	$4.869 \cdot 10^{24}$	6.05	243.02 сут.
⊕	Земля	1.0000	365.26 сут.	$5.974 \cdot 10^{24}$	6.37	23.93 ч
☾	↪ Луна	0.0026	27.32 сут.	$7.348 \cdot 10^{22}$	1.74	*синхр.*
♂	Марс	1.5237	686.98 сут.	$6.419 \cdot 10^{23}$	3.40	24.62 ч
♃	Юпитер	5.2028	11.862 лет	$1.899 \cdot 10^{27}$	71.5	9.92 ч
♄	Сатурн	9.5388	29.458 лет	$5.685 \cdot 10^{26}$	60.3	10.66 ч
⛢	Уран	19.1914	84.01 лет	$8.683 \cdot 10^{25}$	25.6	17.24 ч
♆	Нептун	30.0611	164.79 лет	$1.024 \cdot 10^{26}$	24.7	16.11 ч