

Тренерский штаб сборной России по астрономии и астрофизике
Методическая комиссия олимпиады школьников по астрономии имени В. Я. Струве



II Олимпиада школьников по астрономии имени В. Я. Струве

Заключительный этап

Задания, решения и критерии оценивания

Методическое пособие

Москва
2023

УДК 52(076.1)

ББК 22.6

II Олимпиада школьников по астрономии имени В. Я. Струве. Заключительный этап. Задания, решения и критерии оценивания : методическое пособие / Под ред. И. А. Утешева, А. В. Веселовой — М.: 2023. — 42 с.

Олимпиада школьников по астрономии имени В. Я. Струве проводится для учащихся 7–8-х классов как дополнение к Всероссийской олимпиаде школьников по астрономии, в последних этапах которой принимают участие 9–11-классники. Олимпиада проводится для популяризации астрономии и других естественных наук, а также для выявления на раннем этапе способных и талантливых учащихся и их привлечения к систематическим занятиям астрономией.

Заключительный этап II олимпиады состоялся 11–12 мая 2023 года в распределённом формате в 55 регионах России от Камчатского края до Калининградской области.

Комплект заданий подготовлен методической комиссией олимпиады школьников по астрономии имени В. Я. Струве
struve.astroedu.ru • struve@astroedu.ru

Авторы-составители: Булыгин И. И., МГУ им. М. В. Ломоносова, ЦПМ (Москва)
Веселова А. В., СПбГУ (Санкт-Петербург)
Волобуева М. И., РГПУ им. А. И. Герцена (Санкт-Петербург)
Раменский М. С., НИУ ВШЭ, ЦПМ (Москва)
Утешев И. А., МФТИ, ЦПМ (Москва)
Шамбин А. И., АГУ (Республика Адыгея)

Редакторы: Утешев И. А. — теоретический тур
Веселова А. В. — онлайн-тур

Рецензенты: Желтоухов С. Г., МГУ им. М. В. Ломоносова, ЦПМ (Москва)
Эскин Б. Б., СПбГУ (Санкт-Петербург)

Тренерский штаб сборной России по астрономии и астрофизике выражает благодарность Министерству просвещения Российской Федерации и Московскому физико-техническому институту за поддержку инициативы по организации олимпиады, а также всех причастных к её проведению.

Содержание

I Теоретический тур	4
7 класс	6
7.1 Где карта, Билли?	6
7.2 Великий год Сотиса	9
7.3 Глобулы Бока	12
7.4 Жирафы	14
7.5 Флот вторжения	17
7.6 Ты Венера, я Меркурий	19
8 класс	23
8.1 Где карта, Билли?	23
8.2 Великий год Сотиса	26
8.3 Глобулы Бока	29
8.4 Жирафы	31
8.5 От океана до моря	34
8.6 Транзит будущего	37
II Онлайн-тур	41
Справочные данные	42

Часть I

Теоретический тур

На теоретическом туре участникам предложены 6 задач, на выполнение которых отводилось 3 часа 55 минут. Каждая задача предполагает представление развёрнутого письменного решения. Похожие задачи для разных классов имеют одинаковые названия, но, возможно, разное содержание.

Решение каждого задания оценивается из 10 баллов. Максимальная оценка за тур — 60 баллов.

Принципы оценивания олимпиадных работ

1. Правильное решение оценивается полным баллом, при этом оно не обязано повторять авторское буквально или логически. Частично верное или совершенно неверное решение оценивается соответственно частичным баллом или нулём.

2. Решение участника разбивается на логические элементы (шаги). Каждый из шагов оценивается независимо в соответствии с критериями, приведёнными после авторского решения задачи. Оценка за задачу равна сумме оценок за каждый из критериев. За каждый из критериев выставляется *целая неотрицательная* оценка. Если критерием предусмотрен штраф, он применяется к полной оценке за критерий; штрафы в пределах одного критерия складываются.

3. Каждый критерий оценивается независимо. За одну и ту же ошибку участник не может быть «наказан» дважды.

Так, если критерии подразумевают выполнение последовательности действий и участник допускает ошибку, оценка снижается только за соответствующий шаг, а последующие результаты должны пересчитываться и оцениваться так, будто промежуточный ответ был правильным.

Исключение: если участник получил и проигнорировал заведомо абсурдный ответ (конечный или промежуточный), оценка снижается за все связанные критерии вплоть до нуля.

4. Оригинальные решения, не совпадающие с авторскими, оцениваются по аналогии, если в них возможно выделить аналогичные шаги.

Решение участника может оказаться более эффективным, чем авторское. В таком случае «выпадающие» критерии оцениваются в полном объёме.

5. Если участник совершает ошибку, не предусмотренную в критериях, член жюри самостоятельно определяет величину штрафа.

Оценка *не снижается* за плохой почерк, помарки, недостатки оформления и прочие не относящиеся к сути решения участника элементы, но может быть снижена за запись численных ответов с заведомо абсурдной точностью.

6. Для выставления справедливой оценки учитывается *вся проделанная участником работа*. Некоторые правильные идеи и догадки, имеющие отношение к корректному решению задачи, могут быть оценены суммарно в 1–2 балла даже при отсутствии конкретных продвижений.

7. Не оцениваются элементы, не имеющие отношения к решению конкретной задачи: отвлечённые факты и произвольные формулы. Однако если правильное решение содержит необязательные дополнения и комментарии с грубыми физическими и астрономическими ошибками, оценка может быть снижена.

7 класс

7.1 Где карта, Билли?

Путь из точки А в точку В на поверхности Земли описан так: «Пройдите 10 км на юг, потом 10 км на восток, затем 10 км на север». Известно, что точки А и В находятся в Северном полушарии. Найдите минимальное и максимальное возможное расстояние между точками А и В по прямой.

Возможное решение. Представим себе путь из точки А в точку В: сначала мы движемся на юг, затем на восток, затем на север, на каждом участке пути проходя одно и то же расстояние и поворачивая под прямыми углами. Можно подумать, что мы лишь движемся по квадрату со стороной 10 км, выйдя из верхней левой вершины и обходя квадрат против часовой стрелки (рис. 1). Тогда по окончании пути мы окажемся в верхней правой вершине квадрата, расстояние между пунктами А и В окажется равным 10 км, не больше и не меньше... В чём недостаток такого рассуждения? Мы пренебрегли кривизной поверхности Земли: наш маршрут не лежит на плоскости!

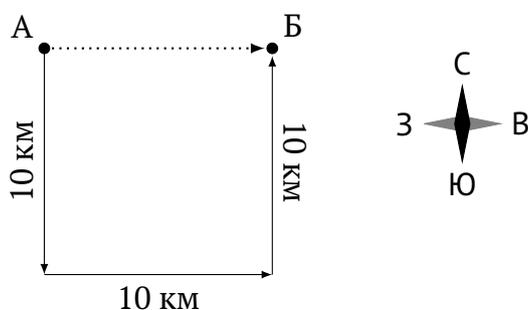


Рис. 1: «Плоский» маршрут из А в В

Смещение на юг и север соответствует движению по меридиану (по широте), смещение на восток — движению по параллели (по долготе). Поскольку широтные перемещения (на юг и на север) одинаковы, точки А и В находятся на одной широте. Заметим, что чем ближе к Северному полюсу, тем меньшую длину имеют параллели: пространственный радиус параллели тем меньше, чем больше географическая широта. Следовательно, чем севернее проходит маршрут, тем больше отличие рисунка маршрута от плоского и тем меньше расстояние между точками А и В: «верхняя» сторона «квадрата» севернее — то есть короче — южной.

Покажем, что пункты А и Б могут совпадать, для этого начнём движение с Северного полюса. Сначала мы смещаемся на 10 км к югу (юг — в любом направлении), затем проходим на восток, то есть вдоль некоторой параллели, 10 км, а потом, пройдя 10 км к северу, оказываемся снова на Северном полюсе, поскольку расстояние от любой точки этой параллели до Северного полюса равно 10 км (рис. 2). Следовательно, наименьшее возможное расстояние между точками А и Б — **0 км**.

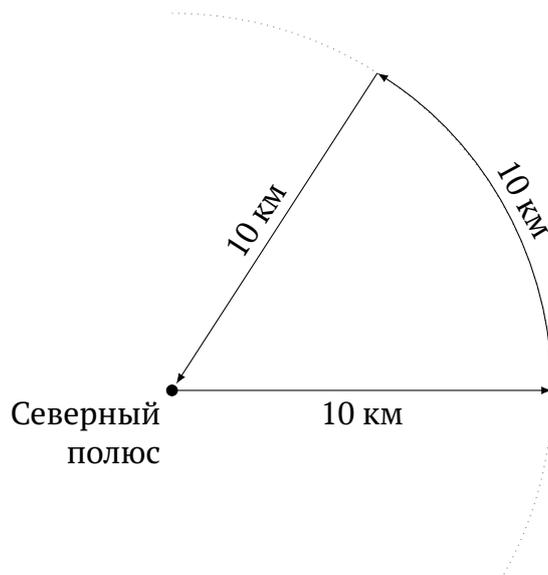


Рис. 2: Замкнутый «полярный» маршрут

Получим оценку наибольшего расстояния. Чем дальше от Северного полюса, тем меньшую долю параллели занимает перемещение на восток: так, на экваторе, имеющем длину около 40 тысяч км, смещение по маршруту в восточном направлении займет лишь сотые доли процента. Следовательно, при расположении начальной точки практически на экваторе возможно пренебречь кривизной земной поверхности и считать расстояние между точками А и Б равным **10 км**, как в изначальном «плоском» рассуждении.

Критерии оценивания:

1	Минимальное расстояние. Описание маршрута и правильный ответ	5
2	Максимальное расстояние. Описание маршрута и правильный ответ	3 + 2
Всего		10

Дополнение. В реальности максимальное расстояние будет слегка отличаться от указанной величины. Если представить, что точки находятся непосредственно на экваторе, смещение на 10 км к югу приведёт нас на более короткую параллель. Тогда возврат к экватору даст *чуть бóльшую* верхнюю границу как «отражение» ситуации околополярного маршрута.

Покажем для наиболее заинтересованных читателей **расчёт точной верхней границы** в модели Земли-шара радиусом $6.37 \cdot 10^3$ км. Перемещение от экватора на $\ell = 10$ км приводит к изменению широты на

$$\Delta\varphi = \frac{\ell}{2\pi R_{\oplus}} \cdot 360^{\circ} = \frac{10}{2\pi \times 6.37 \cdot 10^3} \times 360^{\circ} = 0.089946^{\circ}.$$

Параллель $\Delta\varphi$ ю. ш. короче экватора в $1/\cos \Delta\varphi = 1/(1 - 1.23 \cdot 10^{-6})$ раз, поэтому сдвиг по параллели соответствует изменению долготы на

$$\Delta\lambda = \frac{\ell}{2\pi(R_{\oplus} \cos \Delta\varphi)} \cdot 360^{\circ} = \frac{\Delta\varphi}{\cos \Delta\varphi}.$$

Нетрудно заметить, что $\Delta\lambda$ действительно чуть больше $\Delta\varphi$. По возвращении на экватор это соответствует расстоянию (вдоль поверхности)

$$\ell' = \frac{\Delta\lambda}{360^{\circ}} \cdot 2\pi R_{\oplus} = \frac{\ell}{\cos \Delta\varphi} = \frac{10 \text{ км}}{1 - 1.23 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ км} + \underline{12.3 \text{ мм}}.$$

Примечание. Результаты на этой странице **чрезвычайно сильно** подвержены влиянию промежуточных округлений!

Также отметим, что по условию требовалось найти расстояние между пунктами по прямой (по хорде), а не вдоль параллели (по дуге). Тем не менее, отличие этих расстояний настолько мало, что им в условиях задачи, как и несферичностью земной поверхности, следует пренебречь.

Нетрудно убедиться, что длина L хорды, стягивающей дугу окружности радиусом R_{\oplus} , на которую опирается центральный угол β , есть

$$L = 2R_{\oplus} \sin \frac{\beta}{2}.$$

В частности, предыдущая оценка скорректируется до

$$\ell'' = 2R_{\oplus} \sin \frac{\Delta\lambda}{2} = 2R_{\oplus} \sin \frac{\Delta\varphi}{2 \cos \Delta\varphi} = 10 \text{ км} + \underline{11.3 \text{ мм}} = \ell' - \underline{1 \text{ мм}}.$$

Всерьёз оперировать подобными миллиметровыми поправками, конечно, не нужно. Они свидетельствуют лишь о бессмысленности таких «сверхточных» расчётов.

7.2 Великий год Сотиса

Особо важным астрономическим событием для древних египтян был первый после периода невидимости — *гелиакический* — восход Сириуса (Сотиса), который в то время приходился на летнее солнцестояние и предвещал скорый разлив Нила.

В древнеегипетском календарном году было ровно 365 дней, причём египтяне заметили, что гелиакический восход Сириуса смещался на 1 день за 4 календарных года, так что через $365 \times 4 = 1460$ лет приходился на тот же самый день года. Период в 1460 лет назывался сотическим циклом или Великим годом Сотиса.

Используя современные астрономические данные, уточните продолжительность сотического цикла. Считайте, что условия наблюдения Сириуса не изменяются.

Возможное решение. Несмотря на относительную близость Сириуса к Солнцу по сравнению с другими звёздами, расстояния от Земли до Солнца и до Сириуса существенно различны, поэтому для земного наблюдателя в течение года Сириус практически не меняет своё положение на фоне далёких объектов. Условия видимости Сириуса определяются взаимным положением звезды и Солнца на земном небе, которое, в свою очередь, зависит от положения Земли на орбите вокруг Солнца: для земного наблюдателя Солнце смещается вдоль эклиптики, отражая годичное движение Земли по орбите.

Следовательно, между гелиакическими восходами Сириуса, соответствующими фиксированному взаимному положению Сириуса и Солнца, проходит ровно 1 звёздный (сидерический) год — промежуток времени, за который Земля совершает 1 оборот вокруг Солнца. Звёздный год равен 365.25636 суток, эта величина приведена в справочных данных как «сидерический (орбитальный) период [Земли]».

Разные определения «года». Отметим, что период повторения условий восхода связан именно со звёздным годом, а не с тропическим. Тропический год определяется как промежуток времени, за который Солнце завершает один цикл смены времён года. Именно продолжительность тропического года приближают календари — это отражение сезонно-хозяйственной деятельности человека.

Для простоты можно считать, что величина тропического года совпадает с периодичностью наступления, например, весенних равноденствий. Но положение точки весеннего равноденствия в пространстве меняется со временем вследствие прецессии оси вращения Земли. Как следствие, длительность тропического года составляет 365.24219 суток, меньше длительности звёздного года: примерно за 26 тысяч лет точка весеннего равноденствия совершает полный оборот по эклиптике навстречу видимому годичному движению Солнца.

Таким образом, каждый год в древнеегипетском календаре гелиакический восход Сириуса запаздывал на 0.25636 суток относительно предыдущего календарного года, а не на 0.25 суток, как считали древние египтяне, поэтому продолжительность сотического цикла составляет не

$$\frac{365}{0.25} = 1\,460 \text{ лет,}$$

а, с учётом уточнения данных,

$$\left[\frac{365}{0.25636} \right] \approx 1\,424 \text{ года.}$$

Полученная величина — лишь простая оценка, поскольку мы не учитывали эффекты, проявляющиеся на длительных интервалах времени. Так, собственное движение Сириуса превышает угловую секунду в год, то есть вследствие ненулевой относительной скорости Сириуса и Солнца звезда смещается по небу относительно далёких объектов фона. Также вследствие прецессии оси вращения Земли изменяется положение небесного экватора относительно звёзд, что приводит к изменению условий наблюдения Сириуса в конкретном месте на Земле.

Альтернативное решение. Из условия задачи напрямую не следует, что сопоставлять звёздный год следует именно с древнеегипетским календарным годом. Поэтому допустимо рассматривать и современный григорианский календарь.

Средняя продолжительность года в григорианском календаре равна 365.2425 суток. Это значение можно вспомнить или же вычислить исходя из «конструкции» григорианского календаря:

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365 \frac{97}{400} = 365.2425.$$

В таком случае длительность уточнённого сотического цикла составит

$$\left[\frac{365.2425}{365.25636 - 365.2425} \right] \approx 26\,352 \text{ года.}$$

Из-за малой разности в знаменателе дроби результат оказывается чувствителен к точности исходных данных и округлениям, однако погрешность (порядка века) несущественна по сравнению с длительностью самого цикла и точностью модели.

Критерии оценивания:

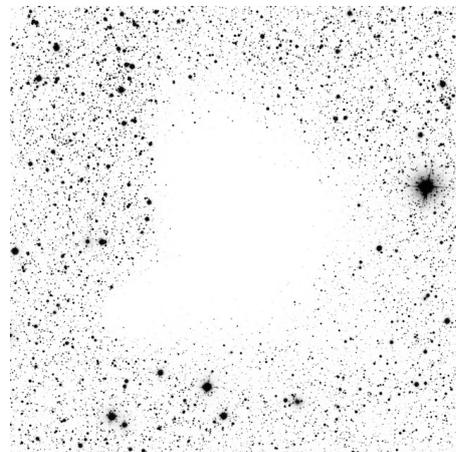
1	Упоминание звёздного года в связи с гелиакическим восходом	2
2	Указание на разницу между календарным (365 или 365.2425 сут.) и [современным] звёздным годом	3
	<i>Вместо календарного года тропический</i>	-1
	<i>Вместо звёздного года тропический</i>	-1
	<i>Вместо современного значения звёздного года «древнеегипетское»</i>	-1
3	Расчёт, сколько «разниц» соответствуют календарному году	3
4	Наличие ответа, адекватного расчётам	2
	<i>Результат не округлён до целого числа лет</i>	-1
Всего		10

7.3 Глобулы Бока

Глобулы Бока — тёмные туманности из газа и пыли, практически непрозрачные для излучения. Они выделяются на фоне далёких звёзд и светлых туманностей как тёмные облака.

Одна из таких туманностей, Барнард 68 обладает диаметром 0.5 светового года и массой, равной 2 массам Солнца. Считая облако однородным шаром, состоящим в основном из молекулярного водорода, оцените концентрацию молекул (количество молекул в кубическом метре) такого облака. Чему равно отношение плотности глобулы к плотности воздуха в комнате?

Плотность воздуха примите равной $\rho_{\text{air}} = 1.3 \text{ кг/м}^3$.



Барнард 68 (негатив)

Подсказка. Молекула водорода H_2 состоит из двух атомов водорода, каждый из которых, в свою очередь, состоит из протона и электрона.

Возможное решение. Для начала определим плотность глобулы. Масса глобулы $M = 2M_{\odot}$, то есть $4 \cdot 10^{30}$ кг. Радиус глобулы равен 0.25 св. года, что составляет в метрах

$$R = 0.25 \times 9.461 \cdot 10^{15} \text{ м} = 2.4 \cdot 10^{15} \text{ м}.$$

Плотность глобулы оценим по массе и объёму, считая глобулу однородным шаром:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{4 \cdot 10^{30} \text{ кг}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (2.4 \cdot 10^{15} \text{ м})^3} = 7 \cdot 10^{-17} \text{ кг/м}^3.$$

Молекула водорода состоит из двух атомов, причём основная масса заключена в протонах, поэтому масса одной молекулы водорода равна примерно удвоенной массе протона:

$$m_0 = 3.3 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Следовательно, концентрация, то есть число молекул в 1 м^3 вещества глобулы, составляет

$$n = \frac{\rho}{m_0} = \frac{7 \cdot 10^{-17} \text{ кг/м}^3}{3.3 \cdot 10^{-27} \text{ кг}} = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}.$$

Отношение плотностей глобулы и воздуха равно

$$k = \frac{\rho}{\rho_{\text{air}}} = \frac{7 \cdot 10^{-17} \text{ кг/м}^3}{1.3 \text{ кг/м}^3} \approx 5 \cdot 10^{-17}.$$

Плотность глобулы оказывается пренебрежимо малой по сравнению с плотностью воздуха.

Посмотрите на иллюстрацию к условию задачи: звёзды фона за глобулой совершенно не видны! На всём луче зрения встречается большое количество частиц пыли, поглощающих и рассеивающих излучение этих звёзд. Масса пыли существенно меньше массы газа туманности, но именно пыль в основном обуславливает оптическую непрозрачность глобулы.

Критерии оценивания:

1	Масса и размер глобулы в метрических единицах	1 + 1
2	Объём глобулы	2
3	Плотность глобулы	2
4	Концентрация молекул <i>Единицы измерения, отличные от требуемых — м⁻³</i>	2 -1
5	Отношение плотностей глобулы и воздуха <i>Найдено обратное отношение</i>	2 -1
Всего		10

Замечание. На каждом этапе должен получаться физически осмысленный результат. В противном случае дальнейшие результаты не засчитываются (п. 3 принципов оценивания, с. 4).

7.4 Жирафы

Ангольский жираф в естественной среде обитания живёт на территории северной Намибии, Ботсваны, юго-западной Замбии и западного Зимбабве, на широтах примерно от 23° ю. ш. до 17° ю. ш. Северное созвездие Жираф занимает на небе область по склонению от $+52.5^\circ$ до $+86.5^\circ$. На всей ли территории обитания ангольских жирафов небесного Жирафа можно наблюдать целиком? Подтвердите ответ вычислениями. Что ещё вы знаете об этом созвездии?

Возможное решение. Для того, чтобы созвездие наблюдалось целиком, необходимо, чтобы по крайней мере в верхней кульминации (в момент достижения наибольшей возможной высоты) над горизонтом находились и северная, и южная границы созвездия.

Вычислим высоты верхних кульминаций северной и южной границ созвездия для северной и южной границ ареала (территории обитания) по формуле

$$h_{\text{ВК}} = 90^\circ - |\varphi - \delta|,$$

где φ — широта места наблюдения (отрицательная для пунктов в Южном полушарии), δ — склонение светила. Результаты вычислений сведём в таблицу:

		δ	
		$+52.5^\circ$	$+86.5^\circ$
φ	-23°	$+14.5^\circ$	-19.5°
	-17°	$+20.5^\circ$	-13.5°

Высоты верхних кульминаций

Заметим, что и на северной, и на южной границе ареала ангольских жирафов северная граница созвездия кульминирует под горизонтом, то есть наблюдаться не может. В результате приходим к выводу, что созвездие Жирафа целиком его земные собратья пронаблюдать **не могут**. Частично же созвездие будет доступно для наблюдения, поскольку его южная граница является восходящей для всего ареала.

Отметим, что созвездие Жирафа — крупное (18-е по площади) околополярное созвездие, граничащее с Малой и Большой Медведицами, Возничим и рядом других созвездий. При этом звёзды созвездия Жирафа довольно слабые, вследствие чего наблюдать созвездие следует вдали от городской засветки неба.

Альтернативный способ. Небольшое дополнительное рассуждение позволяет сократить расчёты. Заметим, что если в некоторой точке Южного полушария видна северная граница созвездия, его южная граница также должна быть видна. Так, можно рассчитать минимальную широту, на которой северная граница созвездия ещё будет кульминировать над горизонтом (на высоте $+0^\circ$), а затем сравнить её с южной границей ареала жирафов:

$$90^\circ - |\varphi_0 - 86.5^\circ| = 0^\circ \quad \implies \quad \varphi_0 = -3.5^\circ.$$

Территория обитания жирафа находится существенно южнее полученной широты, следовательно, полностью созвездие Жирафа увидеть не удастся.

Для любителей геометрии. Решить задачу можно без применения формулы для высоты верхней кульминации, на основе общих представлений об устройстве систем небесных координат. Склонение δ — аналог географической широты — угол, отсчитываемый от небесного экватора до объекта на небесной сфере, или же *широта* точки на Земле, на которую проецируется изображение светила для наблюдателя в центре Земли (см. рис. 3), то есть через зенит проходят объекты, склонение которых равно широте места наблюдения ($\delta = \varphi$).

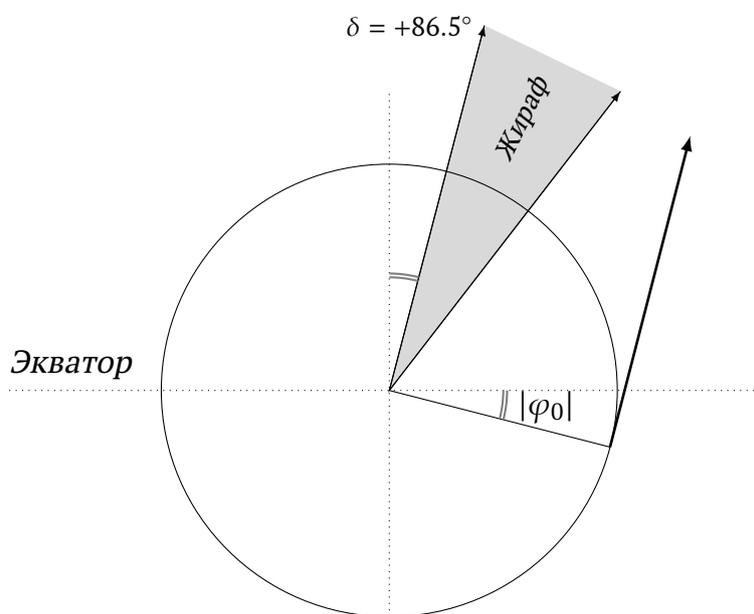


Рис. 3: Чертёж для любителей геометрии*

*Полярное расстояние северной границы Жирафа увеличено для удобства восприятия.

Из чертежа непосредственно получаем $\varphi_0 = -(90^\circ - 86.5^\circ) = -3.5^\circ$, что совпадает с ранее полученным результатом.

Возможно ограничить не только широту, но и склонение. Над математическим горизонтом хотя бы в момент достижения наибольшей высоты находятся объекты с $\delta_0 \geq -(90^\circ - \varphi)$ в случае Северного полушария и $\delta_0 \leq 90^\circ - |\varphi|$ в случае Южного полушария. Для северной границы территории обитания жирафов получаем ограничение на склонение

$$\delta_0 \leq 90^\circ - 17^\circ = +73^\circ.$$

Северная граница созвездия имеет большее склонение, следовательно, не видна.

Критерии оценивания:

1а	Расчёт высот кульминаций границ созвездия на границах ареала жирафа: формула + подстановки	1 + 2 × 2
1б	<i>ИЛИ</i> оценка граничной широты, на которой созвездие видно целиком, с обоснованием выбора границы созвездия и указанием типа граничной широты	5
1в	<i>ИЛИ</i> иной обоснованный способ оценки граничной широты или граничного склонения	5
2	Вывод о невозможности наблюдения созвездия целиком, в случае верного обоснования	3
3	Факты о созвездии Жирафа: граничащие с ним созвездия (не менее двух), сложность для наблюдения (или равноценные)	1 + 1
Всего		10

7.5 Флот вторжения

Цивилизация трисоляриан с планеты в системе тройной звезды α Центавра (годовой парallax 0.747") отправила флот вторжения на Землю, «услышав» сигнал китайского радиотелескопа. Это достаточно развитая цивилизация, которая умеет разгонять свои корабли до 10 % скорости света.

Вам предстоит решить сложную задачу по обороне Земли. Известно, что в момент отправки флота вторжения объединённые земные войска были примерно в 1000 раз слабее трисолярианских, зато люди могут удваивать свою военную мощь каждые 3 года. Считайте, что человечество начало готовиться к встрече гостей сразу после того, как земные телескопы зарегистрировали рой объектов в системе α Центавра.

Как долго будут длиться приготовления землян и будут ли наши войска сравнимы по силе с флотом вторжения к моменту его прибытия?

Возможное решение. Решим задачу в предположении наименее удачного развития событий для землян. Допустим, что враждебный флот практически *мгновенно* разгоняет корабли до наибольшей допустимой скорости. В таком случае время пути от α Центавра до Земли будет наименьшим.

Расстояние от α Центавра до Земли определим по заданному годовому парallaxу $\omega = 0.747''$:

$$L = \frac{1'' \cdot \text{пк}}{\omega} = \frac{1'' \cdot \text{пк}}{0.747''} = 1.34 \text{ пк} = 1.34 \times 3.086 \cdot 10^{13} \text{ км} = 4.13 \cdot 10^{13} \text{ км}.$$

Флот разгоняется до 10 % скорости света, то есть наибольшая скорость движения составляет $v = 0.10 \times 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 3.0 \cdot 10^4 \text{ км/с}$. Время движения флота к Земле

$$t = \frac{L}{v} = \frac{4.13 \cdot 10^{13} \text{ км}}{3.0 \cdot 10^4 \text{ км/с}} = 1.4 \cdot 10^9 \text{ с} = \frac{1.4 \cdot 10^9}{365.25 \cdot 86400} \text{ г.} = 43.6 \text{ г.}$$

Заметим, что к тому моменту, как земные телескопы зарегистрировали флот вторжения в системе α Центавра, флот уже преодолел часть расстояния до Земли: свет распространяется с конечной скоростью, то есть земляне «заглянули в прошлое». Свет преодолевает расстояние от α Центавра до Земли за время, в 10 раз меньшее, чем требуется флоту вторжения, поэтому от момента обнаружения землянами флота до момента прибытия флота в Солнечную систему пройдёт

$$t' = 43.6 \text{ г.} \times (1 - 0.1) \approx (43.6 - 4.4) \text{ г.} \approx \mathbf{39.2 \text{ г.}}$$

Заметим, что $1000 < 1024 = 2^{10}$, то есть для необходимого усиления землян достаточно 10 трёхлеток = 30 лет $< t'$. Таким образом, даже в наименее благоприятном случае силы Земли будут превосходить военную мощь трисоляриан.

Альтернативные способы. Такую же, с точностью до округления, оценку времени полёта флота можно получить несколько проще, переведя расстояние из парсеков в световые годы:

$$1 \text{ пк} : 1 \text{ св. год} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м} : 9.461 \cdot 10^{15} \text{ м} = 3.26$$

$$\implies L = 1.34 \text{ пк} = 1.34 \times 3.26 \text{ св. г.} = 4.37 \text{ св. г.},$$

а затем поделить расстояние в световых годах (1 св. год := $c \cdot 1$ год) на скорость, выраженную в долях скорости света:

$$t = \frac{L}{v} = \frac{4.37 \text{ св. г.}}{0.10c} = 43.7 \text{ г.}$$

Время от обнаружения флота до его прибытия $t' = \frac{L}{v} - \frac{L}{c} = 4.37 \text{ г.} \times (10 - 1) = 39.3 \text{ г.}$

За 39 лет проходит $39/3 = 13$ трёхлеток. За каждую трёхлетку военная мощь землян возрастает вдвое, следовательно, за время t' усиление составит $2^{13} \approx 8 \cdot 10^3 \gg 10^3$ раз. Возможно радостно сделать вывод о победе сил Земли.

Критерии оценивания:

1	Вычисление расстояния до системы α Центавра	2
2	Вычисление времени полёта флота до Земли, исходя из предыдущих результатов участника	2
3	Вычисление задержки регистрации нападения земными телескопами, исходя из предыдущих результатов участника	2
4а	Идея сравнения $2^{T/3} \text{ г.} \vee 1000$ или эквивалентная	2
4б	Оценка превосходства или сравнение критического времени со временем приготовления (от обнаружения до прибытия флота)	2
Всего		10

Типичные ошибки:

- Отсутствие учёта задержки регистрации нападения — общая оценка не более 7 баллов (0 баллов за К 3 и 1 балл за К 4б).
- Необоснованное определение расстояния до α Центавра — общая оценка не более 7 баллов (0 баллов за К 1 и 1 балл за К 4б).

7.6 Ты Венера, я Меркурий

В некоторый момент времени расстояния от Земли до Меркурия и от Земли до Венеры оба оказались равными 1.00 а. е. Определите расстояние между Меркурием и Венерой в этот момент с точностью не хуже 10 %, а также местное время восхода Меркурия и Венеры для наблюдателя на экваторе Земли. Орбиты планет считайте круговыми и лежащими в одной плоскости. Рассмотрите все возможные варианты.

Указание. Вы можете использовать для построений выданный лист с заготовкой чертежа и сдать его вместе с решением задания.

Возможное решение. Изобразим на чертеже (рис. 4) орбиты планет, имея в виду, что центральная точка \odot есть Солнце (С), а имеющаяся большая окружность и отмеченная на ней точка есть орбита Земли и положение самой Земли (З).

Радиусы орбит приведены в справочных данных. Радиусы окружностей составляют соответственно

$$r_З = 1.0000 \text{ а. е.} \rightarrow 85 \text{ мм};$$

$$r_М = 0.3871 \text{ а. е.} \rightarrow 85 \text{ мм} \times 0.3871 \approx 33 \text{ мм};$$

$$r_В = 0.7233 \text{ а. е.} \rightarrow 85 \text{ мм} \times 0.7233 \approx 61 \text{ мм}.$$

Первое выражение задаёт масштаб чертежа — 85 мм : 1 а. е.

По условию задачи Меркурий и Венера удалены от Земли на расстояние 1.00 а. е. Проведём окружность с центром в точке З, проходящую через С, и отметим точки пересечения этой окружности с орбитами Меркурия и Венеры.

Точки $В_З$, $М_З$, $М_В$, $В_В$ лежат на окружности с центром З радиусом 1 а. е.; $М_З$ и $М_В$ — соответственно западное и восточное возможное положение Меркурия; $В_З$ и $В_В$ — аналогично положения Венеры.

Нетрудно заметить два возможных ответа для расстояния между Меркурием и Венерой, которые возможно определить непосредственно из чертежа:

$$|М_ЗВ_З| = |М_ВВ_В| = 30 \text{ мм} \rightarrow (30/85) \text{ а. е.} \approx 0.35 \text{ а. е.};$$

$$|М_ЗВ_В| = |М_ВВ_З| = 91 \text{ мм} \rightarrow (91/85) \text{ а. е.} \approx 1.07 \text{ а. е.}$$

Их оба необходимо указать в качестве итогового ответа, поскольку для выбора конкретных положений планет приведённых в условии данных недостаточно.

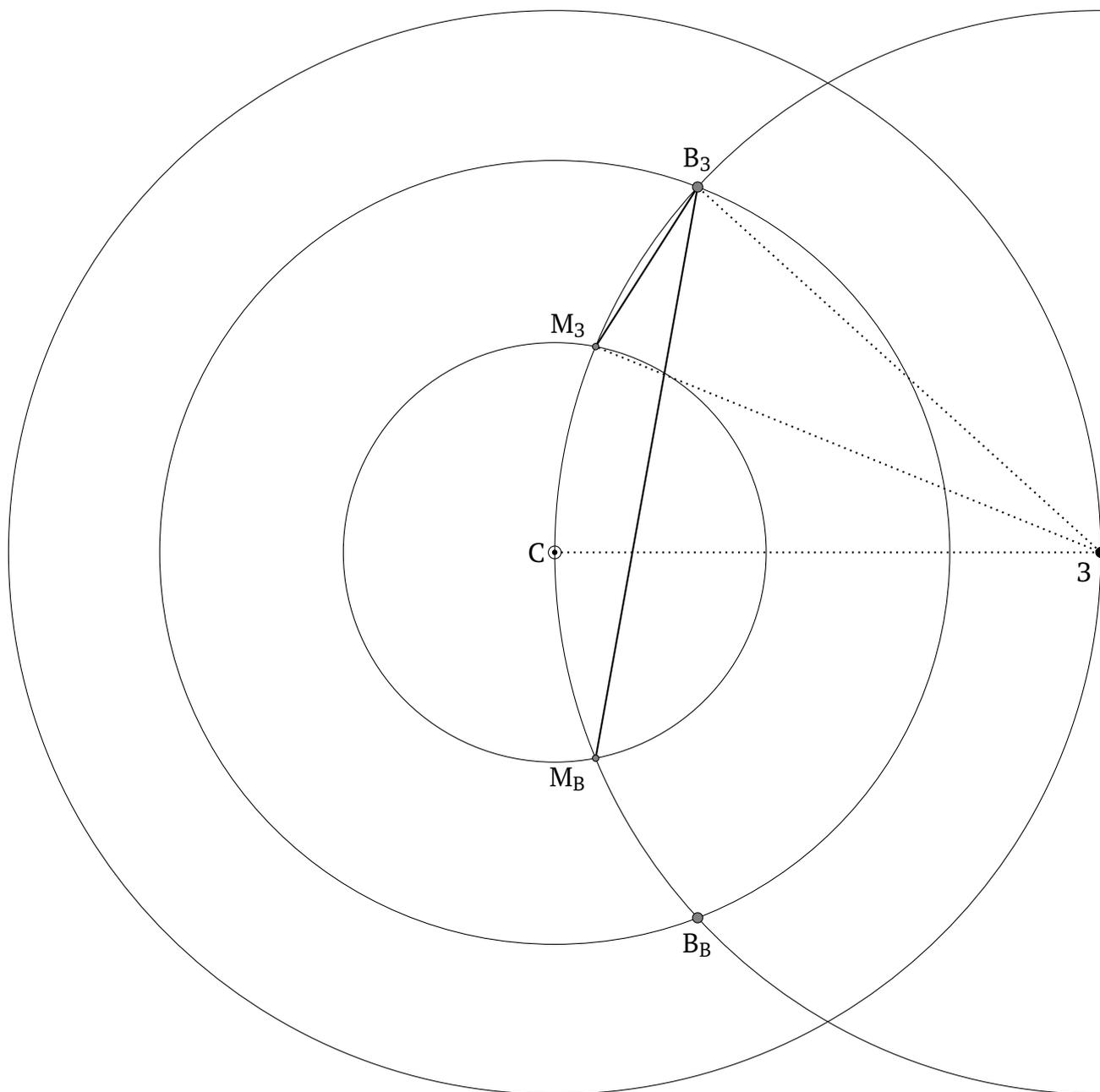


Рис. 4: Построения к задаче 7.6

Теперь определим местное время восхода для каждого из возможных положений планет. Измерим углы:

$$\angle C3M_3 = \angle C3M_B = 22^\circ;$$

$$\angle C3B_3 = \angle C3B_B = 42^\circ.$$

Примечание. Расстояния и углы возможно определить и из тригонометрических соотношений, однако это оказывается неоправданно трудоёмким способом решения при заданной точности в 10 %.

Для оценки возможно пренебречь наклоном эклиптики к плоскости земного экватора (дата наблюдений всё равно неизвестна). За сутки Земля оборачивается на 360° , а смещением планет по их орбитам за это время можно пренебречь. Тогда при угле γ между направлениями на Солнце и планету разность времён восхода планеты и Солнца

$$\Delta t = \frac{\gamma}{360^\circ} \times 24^{\text{h}},$$

что для Меркурия и Венеры в условиях данной задачи составляет соответственно

$$\Delta t_M = \frac{22^\circ}{360^\circ} \times 24^{\text{h}} \approx 1.5^{\text{h}};$$

$$\Delta t_B = \frac{42^\circ}{360^\circ} \times 24^{\text{h}} \approx 2.8^{\text{h}}.$$

Эти отклонения оказываются оценкой *сверху*, поскольку вклад наклона эклиптики уменьшает разность прямых восхождений планет и Солнца. Величина эффекта не превышает 10 минут в рамках рассматриваемой модели.

Восход Солнца на экваторе происходит в 6^{h} по местному времени. Планета к западу от Солнца восходит на Δt раньше него, а планета к востоку — на Δt позже. Результаты сведём в таблицу (что удобно и красиво, но от участников не требовалось):

Планета	Элонгация	
	Западная	Восточная
Меркурий	4.5 ^h	7.5 ^h
Венера	3.2 ^h	8.8 ^h

Местные времена восхода планет

Критерии оценивания:

1	Показаны оба возможных положения Меркурия и Венеры	2
2	Определены оба возможных расстояния для каждой из планет	1×4
3	Определены углы и (или) время между восходом Солнца и планет	0.5×4
4	Рассчитаны времена восхода планет	0.5×4
Всего		10