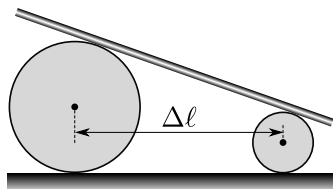


## 10 класс

### Финальный этап

#### Задача 1

Тонкий однородный стержень положили на два цилиндра (см.рис.), радиусы которых различаются на  $\Delta R$ . Цилиндры расположены на горизонтальной поверхности так, что их оси параллельны, а расстояние между ними равно  $\Delta \ell$ . Массы цилиндров пренебрежимо малы.

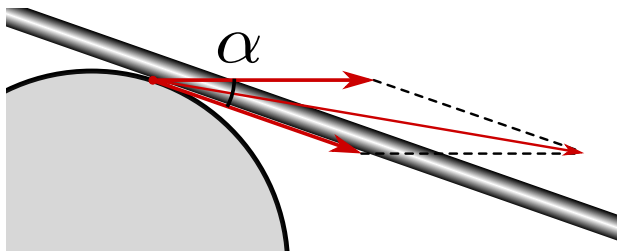


Каким будет модуль и направление линейного ускорения центра масс стержня сразу же после начала движения?

Трение между всеми соприкасающимися поверхностями достаточно велико, чтобы проскальзывания не происходило. Ускорение свободного падения известно и равно  $g$ .

#### Решение

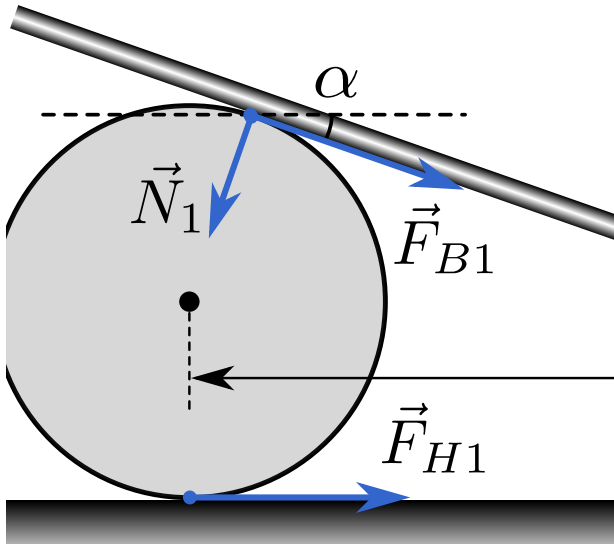
Рассмотрим точку контакта стержня и одного из цилиндров. Так как движение происходит без проскальзывания, цилиндр и стержень будут в этой точке иметь равные ускорения. Ускорение данной точки цилиндра будет складываться из горизонтального поступательного ускорения оси цилиндра и тангенциального ускорения вращательного движения, направленного по касательной к поверхности (вдоль стержня).



Поскольку качение цилиндров по горизонтальной поверхности также происходит без проскальзывания модули данных ускорений будут одинаковыми. Пусть стержень в начальный момент ориентирован под углом  $\alpha$  к горизонту. Тогда вектор полного ускорения (см.рис.) будет составлять с горизонтом угол  $\alpha/2$ . Поскольку стержень является твердым телом, то для его центра масс, находящегося между точками касания цилиндров, ускорение также будет направлено под углом  $\alpha/2$  к горизонту.

Так как масса каждого из цилиндров пренебрежимо мала, то будет равна нулю сумма сил, действующих на цилиндр в горизонтальном направлении, а так же суммарный момент сил относительно его оси:

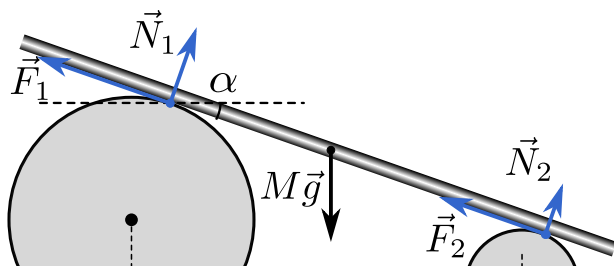
$$\begin{cases} F_H + F_B \cos \alpha = N \sin \alpha \\ F_H = F_B \end{cases}$$



*Силы действующие на один из цилиндров (вертикальная сила реакции в точке опорной поверхности не показана)*

Следовательно для каждого из цилиндров, вне зависимости от его радиуса, выполняется следующее соотношение между силой трения покоя и силой нормальной реакции:

$$F_{1,2} = N_{1,2} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = N_{1,2} \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right). \quad (1)$$



Силы действующие на стержень

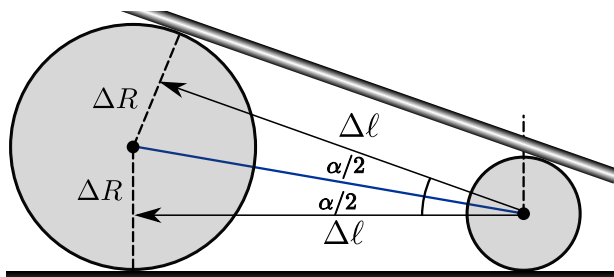
Запишем второй закон Ньютона для стержня в проекции на направление его ускорения:

$$Ma = Mg \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) + (N_1 + N_2) \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) - (F_1 + F_2) \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right). \quad (2)$$

С учетом (1) он принимает вид:

$$Ma = Mg \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right).$$

Остается определить угол  $\alpha/2$  из геометрических соображений.



Опустим два перпендикуляра из оси меньшего цилиндра: один — на вертикальное направление, проходящее через ось большего цилиндра, второй — на его радиус, проходящий через точку касания. Получили два равных прямоугольных треугольника с катетами  $\Delta R$  и  $\ell$  и углами  $\alpha/2$  в правых вершинах. С помощью теоремы Пифагора легко найти синус данного угла:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\Delta R}{\sqrt{\Delta R^2 + \Delta \ell^2}}.$$

ОТВЕТ: Ускорение стержня по модулю равно  $a = g \cdot \frac{\Delta R}{\sqrt{\Delta R^2 + \Delta \ell^2}}$  и направлено под углом  $\arcsin\left(\frac{\Delta R}{\sqrt{\Delta R^2 + \Delta \ell^2}}\right)$  к горизонту.

| Критерии оценивания                                                                                        | Балл |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Правильно определено направление ускорения                                                                 | 1    |
| Верно записаны уравнения второго закона Ньютона для стержня и цилиндров и уравнение моментов для цилиндров | 1    |
| Найден правильное значения модуля ускорения                                                                | 1    |

**Задача 2** Экипаж звездолета «Ломоносов-9» обнаружил в одной далекой галактике две необычные звездные системы, вероятно, искусственного происхождения. В первой из них вокруг звезды массой  $M$  по одной и той же круговой орбите обращаются две планеты-гиганта равной массы  $m$ , всегда находясь на максимально возможном удалении друг от друга. Во второй системе вокруг звезды такой же массы  $M$  также по общей круговой орбите движутся четыре планеты-гиганта массы  $m$ , находясь в любой момент времени в вершинах квадрата в центре которого расположена звезда. Период обращения планет второй системы в  $n$  раз больше, чем у первой ( $T_2/T_1 = n$ ), а радиусы орбит различаются в  $k$  раз ( $R_2/R_1 = k$ ).

Найдите отношение массы звезды к массе одной планеты  $M/m$ .

---

### Решение

Запишем второй закон Ньютона для одной из планет второй звездной системы с учетом сил притяжения к звезде и второй планете:

$$m \frac{4\pi^2}{T_1^2} R_1 = G \frac{Mm}{R_1^2} + G \frac{m^2}{4R_1^2}$$

и приведем его к более компактному виду:

$$\frac{4\pi^2 R_1^3}{T_1^2} = G \left( M + \frac{m}{4} \right). \quad (1)$$

Запишем второй закон Ньютона для одной из планет первой звездной системы с учетом сил притяжения к звезде и трем остальным планетам:

$$m \frac{4\pi^2}{T_2^2} R_2 = G \frac{Mm}{R_2^2} + G \frac{m^2}{4R_2^2} + 2G \frac{m^2}{2R_2^2} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

и также используем более компактную форму записи

$$\frac{4\pi^2 R_2^3}{T_2^2} = G \left( M + \frac{m}{4} + \frac{m}{\sqrt{2}} \right). \quad (2)$$

Разделим (2) на (1) и учтем условия задачи  $T_2/T_1 = n$ ,  $R_2/R_1 = k$ :

$$\frac{k^3}{n^2} = \frac{M + \frac{m}{4} + \frac{m}{\sqrt{2}}}{M + \frac{m}{4}}.$$

Введем обозначение  $\eta = M/m$ :

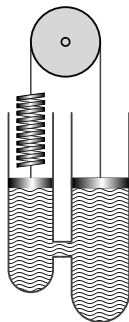
$$k^3 (4\eta + 1) = n^2 (4\eta + 1 + 2\sqrt{2})$$

ОТВЕТ:  $\eta = \frac{M}{m} = \frac{k^3 - (1 + 2\sqrt{2}) n^2}{4(n^2 - k^3)}$

| Критерии оценивания                                                        | Балл |
|----------------------------------------------------------------------------|------|
| Правильно записан второй закон Ньютона для первой звездной системы         | 1    |
| Правильно записан второй закон Ньютона для второй звездной системы         | 1    |
| Безошибочно проведены математические преобразования и получен верный ответ | 2    |

### Задача 3

Известный нанотехнолог Ван Мяо придумал оригинальный прибор для определения плотностей жидких веществ. Он соединил две пробирки с отводами в нижней части с помощью трубки, залил в получившуюся емкость исследуемую жидкость и закрыл пробирки плотно подогнанными поршнями с площадями поперечных сечений  $S_1$  и  $S_2$ . Поршни были соединены между собой невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. В разрез нити Ван Мяо вставил пружину с коэффициентом жесткости  $k$ .



Когда поршни удерживают на одном уровне, то натяжение нити равно  $T_1$ , а если блок отпустить и дать системе прийти в равновесное состояние, то натяжение станет равным  $T_2$ .

Каково значение плотности исследуемой жидкости?

Массы поршней и пружины пренебрежимо малы. Поршни могут скользить внутри пробирок практически без трения, ускорение свободного падения известно и равно  $g$ .

### Решение

Начальную и конечную деформации пружины (считая, что она подчиняется закону Гука) найдем из заданных сил натяжения и коэффициента жесткости:

$$\Delta x_{1,2} = \frac{T_{1,2}}{k}.$$

Пусть в процессе перехода в равновесное состояние первый поршень поднимется на  $\Delta h_1$ , а второй опустится на  $\Delta h_2$ . Тогда из условия неизменности общего объема жидкости получаем:

$$\Delta h_2 = \Delta h_1 \frac{S_1}{S_2}. \quad (1)$$

Тогда величина деформации пружины изменится на разность модулей перемещений поршней:

$$\Delta x_2 - \Delta x_1 = \frac{T_2 - T_1}{k} = \Delta h_2 - \Delta h_1 = \Delta h_1 \left( \frac{S_1}{S_2} - 1 \right).$$

Следовательно

$$\Delta h_1 = \frac{T_1 - T_2}{k} \frac{S_2}{S_2 - S_1}. \quad (2)$$

В состоянии равновесия сумма сил, приложенных к каждому из поршней равна нулю:

$$\begin{cases} 0 = T_2 - P_0 S_1 + P S_1 \\ 0 = T_2 - P_0 S_2 + (P + \rho g (\Delta h_1 + \Delta h_2)) S_2, \end{cases}$$

где  $P_0$  - атмосферное давление, а  $P$  - гидростатическое давление под первым поршнем. Разделим первое уравнение системы на  $S_1$ , а второе на  $S_2$  и вычтем их друг из друга, используя для исключения  $\Delta h_2$  соотношение (1):

$$0 = \frac{T_2}{S_1} - \frac{T_2}{S_2} - \rho g \Delta h_1 \frac{S_1 + S_2}{S_2}.$$

Используя для  $\Delta h_1$  соотношение (2) получаем:

$$\rho g \frac{T_1 - T_2}{k} \cdot \frac{S_2}{S_2 - S_1} \cdot \frac{S_1 + S_2}{S_2} = \frac{T_2}{S_1} - \frac{T_2}{S_2},$$

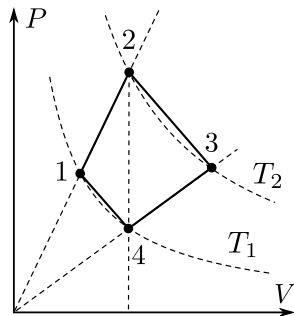
из чего и следует требуемый в задаче ответ.

ОТВЕТ:  $\rho = \frac{k}{g} \cdot \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot \frac{(S_2 - S_1)^2}{S_2 S_1 (S_2 + S_1)}$

| Критерии оценивания                                                     | Балл |
|-------------------------------------------------------------------------|------|
| Найдены величины деформаций пружины                                     | 0.5  |
| Определено соотношение между смещениями поршней                         | 0.5  |
| Найдена связь между изменением деформации пружины и смещениями поршней  | 0.5  |
| Правильно записаны II законы Ньютона для поршней в состоянии равновесия | 1    |
| Найден верный ответ                                                     | 1.5  |

#### Задача 4

Термодинамический цикл  $1-2-3-4-1$  (см.рис.) состоит из четырех процессов, характеризующихся линейной зависимостью давления от объема. Состояния  $1$  и  $4$  лежат на изотерме с известной температурой  $T_1$ , а состояния  $2$  и  $3$  — на изотерме с температурой  $T_2$ . Продолжения участков  $1-2$  и  $3-4$  проходят через начало координат, а объемы  $V_2$  и  $V_4$  равны.



Найдите работу, совершаемую одним молем идеального газа за один цикл.

#### Решение

Сначала найдем работу на участке  $1-2$ . Она равна площади под данным участком цикла:

$$A_{12} = \frac{(P_2 + P_1)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{1}{2} (P_2 V_2 - P_2 V_1 + P_1 V_2 - P_1 V_1).$$

Так как состояния  $1$  и  $2$  лежат на прямой, проходящей через начало координат, то

$$\frac{P_1}{V_1} = \frac{P_2}{V_2} \implies P_2 V_1 = P_1 V_2 \quad (1)$$

Следовательно,

$$A_{12} = \frac{1}{2} (P_2 V_2 - P_1 V_1) = \frac{\nu R}{2} (T_2 - T_1).$$

Таким образом, работа  $A_{12}$  зависит только от разности температур  $T_2 - T_1$ . Проводя аналогичные рассуждения для участка  $3-4$ , получаем, что работа на нем будет иметь точно такое же значение по модулю, но противоположное по знаку, то есть

$$A_{12} + A_{34} = 0.$$

Заметим, что из (1), его аналога для процесса 3-4 и уравнения состояния идеального газа  $P = \frac{\nu RT}{V}$  следует система следующих соотношений:

$$\begin{cases} \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \\ \frac{P_3}{P_4} = \frac{V_3}{V_4} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \end{cases} \quad (2)$$

Найдем работу цикла  $A = A_{23} + A_{41}$ , как сумму площадей под соответствующими участками с учетом знаков совершаемых работ:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(P_2 + P_3)(V_3 - V_2)}{2} - \frac{(P_4 + P_1)(V_4 - V_1)}{2} = \dots \\ \dots &= \frac{1}{2} (P_2V_3 - P_2V_2 + P_3V_3 - P_3V_2 - P_4V_4 + P_4V_1 - P_1V_4 + P_1V_1) = \dots \\ \dots &= \frac{1}{2} (P_2V_3 - \nu RT_2 + \nu RT_2 - P_3V_2 - \nu RT_1 + P_4V_1 - P_1V_4 + \nu RT_1) = \dots \\ &\dots = \frac{1}{2} (P_2V_3 - P_3V_2 + P_4V_1 - P_1V_4). \end{aligned}$$

Используя равенство  $V_2 = V_4$  и соотношения (2), а именно:

$$V_3 = V_4 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}; \quad P_3 = P_4 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}; \quad V_1 = V_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}; \quad P_1 = P_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}};$$

запишем выражение для работы в виде

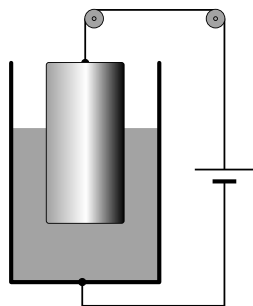
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left( P_2V_2 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - P_4V_4 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} + P_4V_4 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - P_2V_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) = \dots \\ \dots &= \frac{\nu R}{2} \left( T_2 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - T_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} + T_1 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - T_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) = \dots \\ &\dots = \frac{\nu R}{2} \left( \frac{T_1 + T_2 - 2T_1T_2}{\sqrt{T_1T_2}} \right). \end{aligned}$$

ОТВЕТ:  $A = \frac{\nu R (T_2 - T_1)^2}{2\sqrt{T_1T_2}}.$

| Критерии оценивания                                | Балл |
|----------------------------------------------------|------|
| Найдены работы на участках <b>1-2</b> и <b>3-4</b> | 1.0  |
| Выведены соотношения (2) или их аналоги            | 1.0  |
| Найдены работы на участках <b>2-3</b> и <b>4-1</b> | 2.0  |

## Задача 5

Нагрузочный реостат представляет собой жидкостное переменное сопротивление и предназначен для создания нагрузки при проведении силовых испытаний электровозов. Один из электродов реостата это цилиндр площадью горизонтального поперечного сечения  $S_1 = 200 \text{ см}^2$  с идеально проводящим дном и электроизолирующей боковой поверхностью. Цилиндр частично залит проводящей жидкостью с удельным сопротивлением  $\rho = 315 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Вторым, подвижным электродом в форме сплошного однородного цилиндра с площадью поперечного сечения  $S_2 = 100 \text{ см}^2$  с помощью системы тросов и блоков можно погружать в жидкость.

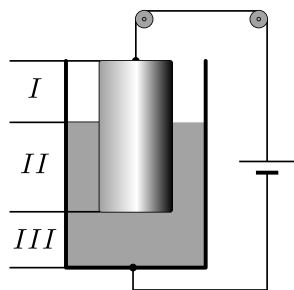


Каким должно быть удельное сопротивление материала подвижного электрода, чтобы при его подъеме по вертикали на расстояние  $\Delta x = 1 \text{ см}$  сопротивление реостата возрастало бы на  $\Delta R = 0,5 \text{ Ом}$ ?

Плотность материала электрода больше, чем плотность жидкости. В реостате не происходит никаких электролитических процессов.

## Решение

Общее сопротивление реостата складывается из сопротивлений трех последовательно соединенных участков: *I* - «воздушная» часть подвижного электрода, *II* - участок, на котором параллельно соединены оставшаяся часть электрода и проводящая жидкость, *III* - все поперечное сечение цилиндра занимает проводящая жидкость.



В целях упрощения формы записи сразу заметим, что по условию задачи  $S_1 = 2S_2$  и будем использовать единое обозначение  $S$ :  $S_1 = S$ ,  $S_2 = S/2$ .

Тогда сопротивление всей системы будет равно

$$R = \frac{2\rho'\ell_I}{S} + \left( \frac{S}{2\rho'\ell_{II}} + \frac{S}{2\rho\ell_{II}} \right)^{-1} + \frac{\rho\ell_{III}}{S} = \dots$$

$$\dots = \frac{2\rho'\ell_I}{S} + \frac{\rho\rho'}{\rho + \rho'} \frac{2\ell_{II}}{S} + \frac{\rho\ell_{III}}{S},$$

где  $\rho'$  - искомое удельное сопротивление материала подвижного электрода.

Найдем насколько изменится сопротивление всего реостата при подъеме подвижного электрода на  $\Delta x$ :

$$\Delta R = \frac{4\Delta x\rho'}{S} - \frac{\rho\rho'}{\rho + \rho'} \frac{4\Delta x}{S} + \frac{\rho\Delta x}{S}.$$

Появление дополнительного множителя «2» в первом и втором слагаемом связано с тем, длина «сухой» части подвижного электрода возрастает не только из-за его подъема, но и из-за понижения уровня жидкости в цилиндре.

Введем обозначение  $\alpha = \frac{\Delta R}{\Delta x} S$  и перепишем последнее уравнение в более компактном виде:

$$\alpha = 4\rho' - \frac{4\rho\rho'}{\rho + \rho'} + \rho,$$

что дает нам квадратное уравнение для нахождения  $\rho'$ :

$$4\rho'^2 + (\rho - \alpha)\rho' + (\rho^2 - \alpha\rho) = 0. \quad (1)$$

Его положительный корень и будет ответом задачи.

ОТВЕТ:  $\rho' = \frac{\alpha - \rho + \sqrt{(\alpha - \rho)(15\rho + \alpha)}}{8} \approx 333 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$

| Критерии оценивания                                                             | Балл |
|---------------------------------------------------------------------------------|------|
| Найдена верная эквивалентная схема реостата                                     | 1.0  |
| Найдена верная связь между смещением цилиндра и изменением общего сопротивления | 1.0  |
| Записано уравнение (1) или его аналог                                           | 1.0  |
| Получен ответ в общем виде                                                      | 1.0  |
| Получен верный числовой ответ                                                   | 1.0  |