

11 класс

Задача 1 Работа против втягивания пластины

Плоский конденсатор с обкладками площадью S , расстоянием d , заряжен до напряжения U_0 . Затем в зазор вводят металлическую пластину толщиной $d/2$ той же площади S , не касаясь обкладок. При симметричном расположении пластины зазор разделяется на два равных интервала по $d/4$. **Определите работу A , которую необходимо совершить внешней силой при введении пластины (пренебрегая краевыми эффектами).**

Ответ: $A = -\frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{4d}.$

Решение.

1. Исходный конденсатор имеет ёмкость

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad \text{и энергию} \quad W_{\text{нач}} = \frac{1}{2} C U_0^2.$$

После введения металлической пластины толщиной $d/2$, при симметричном расположении, расстояния между обкладками уменьшаются до $d/4$ для каждого из двух получившихся конденсаторов, имеющих ёмкость

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d/4} = \frac{4\varepsilon_0 S}{d}.$$

2. Так как эти два конденсатора соединены последовательно, их эквивалентная ёмкость равна

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} = \frac{2}{C_1} \quad \Rightarrow \quad C' = \frac{C_1}{2} = \frac{2\varepsilon_0 S}{d} = 2C.$$

Поскольку заряд сохраняется ($Q = C U_0$), новое напряжение на конденсаторе равно

$$U' = \frac{Q}{C'} = \frac{C U_0}{2C} = \frac{U_0}{2}.$$

3. Новая энергия конденсатора:

$$W_{\text{кон}} = \frac{1}{2}C'(U')^2 = \frac{CU_0^2}{4}.$$

Изменение энергии:

$$\Delta W = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = \frac{CU_0^2}{4} - \frac{CU_0^2}{2} = -\frac{CU_0^2}{4}.$$

4. Отрицательное изменение энергии означает, что система теряет энергию (пластина втягивается конденсатором). Чтобы удержать пластину, внешняя сила должна совершить работу, равную отрицательной разности энергий:

$$A = -\Delta W = -\left(-\frac{CU_0^2}{4}\right) = \frac{CU_0^2}{4} = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{4d}.$$

Если же трактовать работу, которую надо совершить, как работу внешней силы (направленную против естественного втягивания), то тогда:

$$A = -\frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{4d}.$$

Ответ: $A = -\frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{4d}.$

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Участник понял, что работу необходимо вычислять как разность энергий, но с существенными ошибками нашел либо емкость, либо новое напряжение	1.0
2	Участник понял, что работу необходимо вычислять как разность энергий, но с незначительными ошибками определил выражение для финальной работы	1.5
3	Участник предоставил полное решение со всеми правильными коэффициентами, максимальный балл	3.0

Задача 2 Перераспределение тепла

В термически изолированном цилиндре с поршнем, который может двигаться без трения, находится разделительная подвижная безмассовая перегородка (разделительный поршень), которая очень медленно проводит тепло между двумя отделами. В одном отделе находится газ A , а в другом, нижнем — газ B . Газы считаются идеальными, а их молярные теплоёмкости при постоянном объёме равны $C_{V,A}$ и $C_{V,B}$ соответственно. Изначально температуры газов равны, а число молей связано соотношением $\nu_A = r\nu_B$, ($r > 1$). В какой-то момент газ A получает некоторое количество теплоты, вследствие чего поршень смещается на расстояние d . Однако, спустя большой промежуток времени наблюдается дополнительное смещение поршня. **Определите, чему оно равно.**

Ответ:
$$d' = \frac{C_{V,A} - C_{V,B}}{r(C_{V,A} + R) + (C_{V,B} + R)} d.$$

1. Процесс I (нагрев газа A).

При изобарном нагреве газа A подведённое количество теплоты:

$$Q_1 = n_A C_{p,A} \Delta T, \quad \text{где } C_{p,A} = C_{V,A} + R.$$

По закону идеального газа при постоянном давлении:

$$p \Delta V_A = n_A R \Delta T, \quad \Delta V_A = Sd,$$

откуда:

$$\Delta T = \frac{p S d}{n_A R}.$$

Следовательно,

$$Q_1 = n_A (C_{V,A} + R) \frac{p S d}{n_A R} = \frac{(C_{V,A} + R) p S d}{R}.$$

2. Процесс II (установление равновесия).

После нагрева происходит перераспределение теплоты между

газами. При котором оба газа изменяют температуру, т.е. можно рассмотреть эквивалентный процесс, когда в результате всего процесса каждый газ меняет температуру на ΔT_{eq} , а положение поршня верхнего меняется на $d + d'$. В этом случае суммарное количество теплоты:

$$Q_2 = [n_A C_{p,A} + n_B C_{p,B}] \Delta T_{\text{eq}}.$$

При общем изменении объёма $\Delta V_{\text{total}} = S(d + d')$ справедливо:

$$pS(d + d') = (n_A + n_B)R\Delta T_{\text{eq}},$$

откуда:

$$\Delta T_{\text{eq}} = \frac{pS(d + d')}{(n_A + n_B)R}.$$

Следовательно,

$$Q_2 = \frac{[n_A(C_{V,A} + R) + n_B(C_{V,B} + R)]pS(d + d')}{(n_A + n_B)R}.$$

3. Равенство теплоты.

При условии, что теплота, подведённая в процессе I, перераспределяется в процессе II, полагаем:

$$Q_1 = Q_2.$$

Сократим общий множитель $\frac{pS}{R}$:

$$(C_{V,A} + R)d = \frac{n_A(C_{V,A} + R) + n_B(C_{V,B} + R)}{n_A + n_B}(d + d').$$

При $n_A = rn_B$ имеем:

$$n_A + n_B = (r + 1)n_B,$$

$$n_A(C_{V,A} + R) + n_B(C_{V,B} + R) = n_B[r(C_{V,A} + R) + (C_{V,B} + R)].$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$(C_{V,A} + R)d = \frac{r(C_{V,A} + R) + (C_{V,B} + R)}{r + 1}(d + d').$$

Разрешив его относительно d' , получим окончательно:

$$d' = \frac{C_{V,A} - C_{V,B}}{r(C_{V,A} + R) + (C_{V,B} + R)}d.$$

Ответ: $d' = \frac{C_{V,A} - C_{V,B}}{r(C_{V,A} + R) + (C_{V,B} + R)}d.$

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Участник записал правильные формулы для идеального газа и количества теплоты, но совсем неверно их применил	1.0
2	Участник записал правильные формулы для идеального газа и количества теплоты, и правильно наметил ход решения задачи, однако не смог собрать все в итоговый ответ	2.0
3	Участник все сделал правильно, но при расчетах допустил незначительную арифметическую ошибку	4.0
4	Участник все сделал правильно, получив в итоге правильный ответ	5.0

Задача 3 Рычажные весы

На рычажных весах измеряют массу образца, изготовленного из алюминия, с помощью стандартных грузиков, изготовленных из меди. Измерения проводятся при заданной температуре T в двух условиях: в сухом воздухе при атмосферном давлении p_a и во влажном, насыщенном водяными парами воздухе, где давление водяного пара равно p_v . Плотность алюминия ρ_A , а плотность меди — ρ_C . Чувствительность весов составляет δm . Требуется определить минимальную массу образца m , при которой разница показаний весов при измерениях в сухом и влажном воздухе будет не менее δm .

Ответ: Минимальная масса образца выражается как

$$m_{\min} = \frac{\delta m}{\frac{1 - \frac{\rho_w}{\rho_A}}{1 - \frac{\rho_s}{\rho_C}} - \frac{\rho_A}{\rho_C}},$$

где

$$\rho_s = \frac{p_a M_a}{RT}, \quad \rho_w = \frac{(p_a - p_v) M_a + p_v M_v}{RT}.$$

Решение

1. Определение эффективного веса образца.

При учёте Архимедовой силы эффективный вес тела равен разности между его истинным весом и силой Архимеда, то есть весом вытесненного воздуха. Если истинная масса образца равна m и его плотность составляет ρ_A , то объём образца есть

$$V = \frac{m}{\rho_A}.$$

Таким образом, эффективный вес образца(в нашем случае это

кусок алюминия) равен

$$W_{\text{eff}} = mg - \rho g \frac{m}{\rho_A} = mg \left(1 - \frac{\rho}{\rho_A} \right),$$

где ρ — плотность окружающего воздуха, g — ускорение свободного падения.

При взвешивании на весах используются грузики из меди, для которых аналогично эффективный вес определяется как

$$W'_{\text{eff}} = m_{\text{ind}} g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_C} \right),$$

где m_{ind} — реальная масса грузиков (указанная на них).

При равновесии весов эффективный вес образца равен эффективному весу грузиков:

$$m_{\text{ind}} g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_A} \right) = m_{\text{ind}} g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_C} \right).$$

Сократив уравнение на g и выразив m_{ind} , получаем

$$m_{\text{ind}} = m \cdot \frac{1 - \frac{\rho}{\rho_A}}{1 - \frac{\rho}{\rho_C}}.$$

2. Определение плотности воздуха.

Для расчёта плотности воздуха используется уравнение состояния идеального газа. В сухом воздухе при давлении p_a плотность равна

$$\rho_s = \frac{p_a M_a}{RT}.$$

В влажном воздухе с насыщенным водяным паром давление водяного пара составляет p_v , а давление сухой фазы — $p_a - p_v$. Тогда плотность влажного воздуха определяется как

$$\rho_w = \frac{(p_a - p_v) M_a + p_v M_v}{RT}.$$

3. Отображаемые массы в сухом и влажном воздухе.

При взвешивании в сухом воздухе отображаемая(в виде набора нужных грузиков медных) масса

$$m_{\text{ind,s}} = m \cdot \frac{1 - \frac{\rho_s}{\rho_A}}{1 - \frac{\rho_s}{\rho_C}},$$

а во влажном воздухе

$$m_{\text{ind,w}} = m \cdot \frac{1 - \frac{\rho_w}{\rho_A}}{1 - \frac{\rho_w}{\rho_C}}.$$

Обозначим

$$R_s = \frac{1 - \frac{\rho_s}{\rho_A}}{1 - \frac{\rho_s}{\rho_C}}, \quad R_w = \frac{1 - \frac{\rho_w}{\rho_A}}{1 - \frac{\rho_w}{\rho_C}},$$

тогда

$$m_{\text{ind,s}} = mR_s, \quad m_{\text{ind,w}} = mR_w.$$

4. Определение минимальной массы образца.

Разница между показаниями весов в влажном и сухом воздухе составляет

$$\Delta m_{\text{инд}} = m(R_w - R_s).$$

Чтобы эта разница была не менее чувствительности весов δm , необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$m(R_w - R_s) \geq \delta m.$$

Отсюда минимальная масса образца, удовлетворяющая условию,

определяется формулой

$$m_{\min} = \frac{\delta m}{R_w - R_s}.$$

Ответ: Минимальная масса образца выражается как

$$m_{\min} = \frac{\delta m}{1 - \frac{\rho_w}{\rho_A} - \frac{1 - \frac{\rho_s}{\rho_C}}{1 - \frac{\rho_s}{\rho_C}}},$$

где

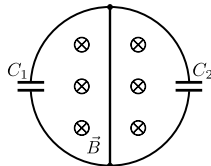
$$\rho_s = \frac{p_a M_a}{RT}, \quad \rho_w = \frac{(p_a - p_v)M_a + p_v M_v}{RT}.$$

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Участник показал, что понял в чем суть задачи, однако не смог правильно записать все необходимые формулы	2.0
2	Участник записал все правильные формулы и верно определил итоговый ответ	5.0

Задача 4

Проводящий стержень расположен по диаметру проводящего кольца радиуса R , как показано на рисунке. В левую и правую половину кольца включены конденсаторы ёмкостью C_1 и C_2 ($C_1 > C_2$), которые изначально не заряжены. Плоскость кольца перпендикулярна линиям индукции однородного магнитного поля, величина которого изменяется по закону $B(t) = B_0 \frac{t}{\tau}$, где B_0 и τ - известные константы.



В некоторый момент времени стержень убирают, а изменение магнитного поля прекращают. Какими будут равновесные заряды обоих конденсаторов?

ОТВЕТ: $q'_{1,2} = \frac{\pi B_0 R^2}{2\tau} \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} C_{1,2}$.

Решение.

Магнитный поток через каждую половину кольца:

$$\Phi(t) = B(t)\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{2} \left(B_0 \frac{t}{\tau} \right).$$

Тогда индуцированная ЭДС (одинаковая для каждой полуокружности) равна:

$$\mathcal{E}_i = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \pi R^2 \frac{B_0}{2\tau}.$$

Пока стержень на месте, конденсаторы получают заряды

$$q_1 = C_1 \mathcal{E}_i, \quad q_2 = -C_2 \mathcal{E}_i.$$

Затем стержень убирают и поле перестают менять. В кольцо ток исчезает, поэтому:

$$\begin{cases} q'_1 + q'_2 = (C_1 - C_2) \mathcal{E}_i, \\ \frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_2}{C_2}. \end{cases}$$

Решая, получаем:

$$q'_1 = \mathcal{E}_i \frac{(C_1 - C_2)C_1}{C_1 + C_2}, \quad q'_2 = \mathcal{E}_i \frac{(C_1 - C_2)C_2}{C_1 + C_2}.$$

Подставляя $\mathcal{E}_i = \pi R^2 \frac{B_0}{2\tau}$, находим окончательно:

$$q'_1 = \pi R^2 \frac{B_0}{2\tau} \frac{(C_1 - C_2)C_1}{C_1 + C_2} \quad \text{и} \quad q'_2 = \pi R^2 \frac{B_0}{2\tau} \frac{(C_1 - C_2)C_2}{C_1 + C_2}.$$

Ответ: $q'_1 = \pi R^2 \frac{B_0}{2\tau} \frac{(C_1 - C_2)C_1}{C_1 + C_2}$ и $q'_2 = \pi R^2 \frac{B_0}{2\tau} \frac{(C_1 - C_2)C_2}{C_1 + C_2}$.

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Участник понял, что необходимо определить ЭДС индукции, и понял какие заряды сперва получают конденсаторы	1.0
2	Участник записал все правильные формулы и верно определил итоговый ответ	3.0

Задача 5 Столкновение гантелей

Пусть каждая из двух одинаковых механических систем (“пружинных гантелей”) состоит из двух шариков массой m , соединённых пружиной жёсткостью k . Обе системы скользят навстречу друг другу по прямой с одинаковой скоростью v_0 . В некоторый момент времени расстояние между ближайшими шариками (одним из левой гантели и одним из правой) равно L . **Необходимо определить, через какой промежуток времени это расстояние снова станет равным L , если все столкновения шариков абсолютно упруги.**

Ответ: $T = \frac{L}{v_0} + \pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$.

1. **Время до первого столкновения.** При движении навстречу центральные шарики сближаются со скоростью $2v_0$, поэтому время до первого столкновения равно:

$$t_1 = \frac{L}{2v_0}.$$

2. Переход через столкновение и колебания внутри гантелей.

При упругом столкновении двух шариков одинаковой массы их скорости меняются местами. В результате центральный шарик левой гантели получает скорость $-v_0$, а центральный шарик правой гантели $+v_0$. Каждый из двух шариков внутри своей гантели теперь движется в противоположные стороны, возбуждая колебания пружины. При рассмотрении относительного смещения $y = x_2 - x_1$ силы от пружины складываются, то есть как бы *эффективная* сила равна:

$$F = -2ky.$$

Запишем уравнение движения для относительного смещения:

$$m\ddot{y} = -2ky \implies \ddot{y} + \frac{2k}{m}y = 0.$$

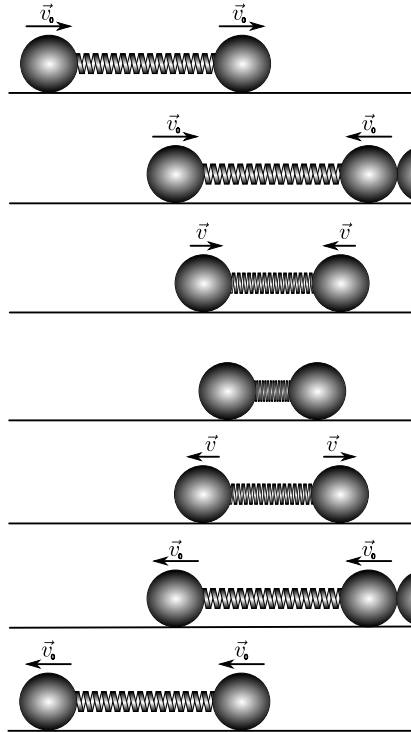
Таким образом, угловая частота колебаний в антисимметричном

режиме равна:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

Полупериод колебаний, за который скорости шариков изменят знак (и центральные шарик внонь сойдутся), равен:

$$t_2 = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$



3. Время после второго столкновения. После второго столкновения центральные шарик расходятся со скоростью v_0 (каждый по направлению, как до первого столкновения). Чтобы расстая-

ние между ними вновь стало L , необходимо время:

$$t_3 = \frac{L}{2v_0}.$$

4. Суммарное время. Общее время, за которое расстояние между гантелями снова станет L , равно:

$$T = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{L}{2v_0} + \pi\sqrt{\frac{m}{2k}} + \frac{L}{2v_0} = \frac{L}{v_0} + \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Ответ: $T = \frac{L}{v_0} + \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}.$

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Участник в целом понял, в чем состоит задача, но не смог разобраться аккуратно в каждом этапе до и после столкновений	1.0
2	Участник в целом понял, в чем состоит задача, но не смог разобраться в каком-то одном из этапов процесса, рассматриваемого в задаче	2.0
3	Участник правильно учел все этапы, однако неверно учел частоту колебаний	3.0
4	Участник все сделал правильно и получил верный ответ	4.0
