

Финальный этап

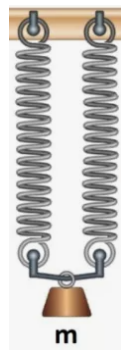
Теоретический тур финального этапа

7 класс

Задача 1 (3 балла)

У Василия есть пружина, длина которой в нерастянутом состоянии ℓ_0 . Для того, чтобы увеличить длину пружины в 2 раза Василий повесил к пружине груз массой m . Василий разрезал пружину пополам. Для того чтобы длина разрезанной пружины стала $2\ell_0$ экспериментатор повесил груз массой $3m$.

Какой будет длина каждой из половинок пружины, соединенным параллельно, если к ним подвесить груз массой m ?



Для первого случая сила упругости уравнивается силой упругости (растяжение пружины ℓ_0). Для второго случая с одной половиной пружины также будет уравнивание сил (растяжение пружины $2\ell_0 - \frac{\ell_0}{2} = \frac{3\ell_0}{2}$). Из условия очевидно, что коэффициент жесткости не может быть одинаковым для целой пружины и половины пружины.

$$mg = k\ell_0$$

$$3mg = \frac{3}{2}k'\ell_0$$

$$k' = 2k$$

При параллельном соединении пружин сила упругости возни-

кает в каждой из пружин. Поэтому силы тяжести уравновешиваются двумя силами упругости (пружины растянуты на длину $\ell - \ell_0/2$, где ℓ длина каждой из половинок пружины)

$$mg = 2k' \left(\ell - \frac{\ell_0}{2} \right)$$

$$mg = k\ell_0, \quad k' = 2k$$

$$k\ell_0 = 4k \left(\ell - \frac{\ell_0}{2} \right)$$

$$\ell_0 = 4\ell - 2\ell_0$$

$$\ell = \frac{3}{4}\ell_0$$

ОТВЕТ: $\frac{3}{4}\ell_0$.

Критерии оценивания	Балл
Выявление или констатация факта зависимости коэффициента жесткости пружины от длины пружины в нерастянутом состоянии	1
Верно записаны выражения равенства сил для одной большой и двух укороченных параллельно соединенных пружин	1
Получен правильный ответ	1

Задача 2 (4 балла)

У Андрея есть две жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 . Андрей аккуратно налил эти жидкости в аквариум так, что они не смешались и поместил в эту жидкость кубик. Кубик плавал полностью в жидкостях. При этом часть кубика находилась в нижней жидкости.

Андрей провел второй эксперимент, смешав эти же жидкости до степени однородности. Объемы использованных жидкостей одинаковы. Поместив в получившуюся смесь тот же кубик, Андрей обнаружил, что кубик плавает в смеси полностью погружившись в нее.

Какая часть кубика была погружена в нижнюю жидкость в первом опыте?

Рассмотрим сначала второй опыт. Так как кубик свободно плавает в смеси, то сила тяжести, действующая на кубик, равна силе Архимеда.

$$mg = \rho g V_0$$

$$\rho_0 g V_0 = \rho g V_0$$

$$\rho_0 = \rho$$

m — масса кубика, ρ — плотность смеси, V_0 — объем кубика, ρ_0 — плотность материала кубика.

Плотность смеси найдем из равенства масс смеси и исходных компонентов:

$$2\rho V = \rho_1 V + \rho_2 V$$

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$$

$$\rho_0 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$$

V — объем взятой жидкости

Рассмотрим первый опыт. Пусть в нижнюю жидкость погружен объем V' кубика. И пусть нижней жидкостью будет жид-

кость с плотностью ρ_2 . Условие плавания на границе раздела жидкостей:

$$\begin{aligned}\rho_0 g V_0 &= \rho_1 (V_0 - V') + \rho_2 V' \\ (\rho_2 - \rho_1) V' &= (\rho_0 - \rho_1) V_0 \\ \frac{V'}{V} &= \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \\ \frac{V'}{V} &= \frac{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\frac{\rho_2 - \rho_1}{2}}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ОТВЕТ: $\frac{1}{2}$.

Критерии оценивания	Балл
Верно записаны законы Архимеда	1
Установлено, что плотность материала кубика рана плотности смеси	1
Найдена плотность смеси	1
Получен правильный ответ	1

Задача 3 (3 балла)

Василий обучается в художественной школе. Ему дали задание: нарисовать черный квадрат. Василий (для отработки навыков) взял много листов бумаги и нарисовал на каждом из них квадрат, площадь которого составляет четверть площади листа. Все квадраты получились абсолютно одинаковыми. Чтобы отчитаться о проделанной работе перед учителем, он сложил все листы в стопку (плотно прижав листы друг к другу), чтобы положить в портфель. Оказалось, что стопка листов представляет собой куб с длиной ребра $a = 5$ см, а число листов равно $N = 100$.

Определите среднюю объемную плотность одного листа бумаги с нарисованным черным квадратом, если известно, что поверхностная плотность бумаги $\sigma_1 = 0.08$ кг/м², а поверхностная плотность краски $\sigma_2 = 3$ кг/м². Поверхностная плотность — это масса одного квадратного метра тела плоского однородного тела.

Так как стопка листов представляет собой куб с ребром a , значит сторона листа также равна a . Значит площадь закрашенной краской части листа равна $a^2/4$, а сторона черного квадрата равна $a/2$.

Масса стопки листов $M = Nm$, где m — масса одного листа. Масса листа бумаги складывается из массы самой бумаги и массы краски. Масса самой бумаги $\sigma_1 S_0 = \sigma_1 a^2$, а масса краски $\sigma_2 \frac{S_0}{4} = \sigma_2 \frac{a^2}{4}$. Тогда масса одного листа

$$m = \sigma_1 a^2 + \sigma_2 \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} (4\sigma_1 + \sigma_2)$$

Объемная плотность всей стопки (она же и будет объемной плотностью одного листа с квадратом на нем)

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Nm}{a^3} = \frac{Na^2(4\sigma_1 + \sigma_2)}{4a^3} = \frac{N(4\sigma_1 + \sigma_2)}{4a}$$
$$\rho = \frac{100(4 \cdot 0.08 + 3)}{4 \cdot 0.05} = 1660$$

ОТВЕТ: $\rho = \frac{N(4\sigma_1 + \sigma_2)}{4a} = 1660 \text{ кг/м}^3$

Критерии оценивания	Балл
Определены размеры (площадь) черного квадрата	1
Определена масса стопки бумаги с черными квадратами	1
Получен правильный ответ	1

Задача 4 (5 баллов)

Николай и Константин идут параллельно рельсам навстречу друг другу с постоянными скоростями. По рельсам движется с постоянной скоростью поезд. Поезд проезжает мимо Николая за время $\tau_1 = 26$ секунд. Через $\tau_2 = 14$ секунд после проезда Николая поезд встречает Константина и проезжает мимо него за $\tau_3 = 6$ секунд. Через какое время после того, как поезд полностью минует Константина, встретятся Николай и Константин?

Обозначим длину поезда L .

Скорость Николая v_1 найдем из времени проезда поезда мимо него. Они движутся в одну сторону, следовательно (с переводом скоростей в м/с)

$$L = (v - v_1) \tau_1$$

$$v_1 = v - \frac{L}{\tau_1}$$

Аналогично найдем скорость Константина v_2 (но Константин идет навстречу поезду)

$$L = (v + v_2) \tau_3$$

$$v_2 = \frac{L}{\tau_3} - v$$

Пусть в момент встречи поезда с Николаем расстояние между товарищами равно ℓ_0 . Это расстояние равно сумме путей, пройденных поездом и Константином за время $\tau_1 + \tau_2$

$$\ell_0 = (v + v_2) (\tau_1 + \tau_2)$$

$$\ell_0 = \left(v + \frac{L}{\tau_3} - v \right) (\tau_1 + \tau_2) = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_3} L$$

Это расстояние будет пройдено Николаем и Константином за время $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau$, где τ — искомое время до встречи после

того, как поезд проедет мимо Константина.

$$\begin{aligned}
 \ell_0 &= (v_1 + v_2) (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau) \\
 \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_3} L &= \left(v - \frac{L}{\tau_1} + \frac{L}{\tau_3} - v \right) (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau) \\
 \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_3} L &= L \left(\frac{1}{\tau_3} - \frac{1}{\tau_1} \right) (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau) \\
 \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_3} &= \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_1 \tau_3} (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau) \\
 \tau_1^2 + \tau_1 \tau_2 &= \tau_1^2 + \tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 - \tau_1 \tau_3 - \tau_2 \tau_3 - \tau_3^2 + (\tau_1 - \tau_3) \tau \\
 - \tau_2 \tau_3 - \tau_3^2 &+ (\tau_1 - \tau_3) \tau = 0 \\
 (\tau_1 - \tau_3) \tau &= \tau_2 \tau_3 + \tau_3^2 \\
 \tau &= \tau_3 \frac{\tau_2 + \tau_3}{\tau_1 - \tau_3} \\
 \tau &= 6 \cdot \frac{14 + 6}{26 - 6} = 6
 \end{aligned}$$

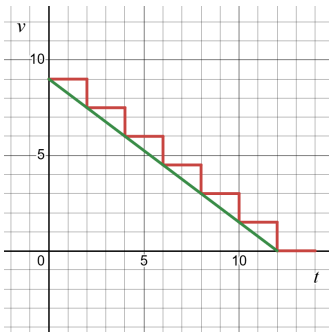
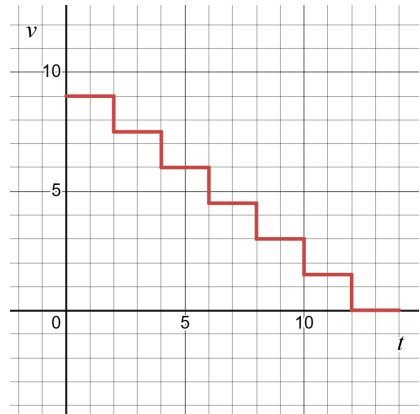
ОТВЕТ: $\tau_3 \frac{\tau_2 + \tau_3}{\tau_1 - \tau_3} = 6$ секунд.

Критерии оценивания	Балл
Определена скорость Николая через скорость поезда и длину поезда	1
Определена скорость Константина через скорость поезда и длину поезда	1
Представлено выражение для расстояния между Николаем и Константином в некоторый момент времени	1
Получено выражение, связывающее промежутки времени, указанные в задаче и искомый промежуток времени	1
Получен правильный ответ	1

Задача 5 (5 баллов)

Распап съедает точки через равные промежутки времени. При поедании каждой точки его скорость резко уменьшается на одну и ту же величину. Во сколько раз средняя скорость Распапа (за промежуток от начала движения до полной остановки) меньше начальной скорости Распапа? Первую точку Распап съедает через тот же промежуток времени, что и остальные. Считать, что процесс поедания точки мгновенный. Начальная скорость в целое число раз больше величины уменьшения скорости при поедании точки. Всего Распап успевает съесть n точек до остановки.

Обозначим промежуток времени, через который Распап съедает точку Δt . Начальная скорость v_0 , при поедании точки скорость уменьшается на Δv . Построим график зависимости скорости от времени (числа на осях условные)



Путь, пройденный Распап'ом, равен площади под этой ступенчатой кривой. Для удобства определения площади выделим треугольники.

Площадь большого треугольника $S = \frac{1}{2}v_0n\Delta t$. Количество маленьких треугольников равно количеству съеденных точек n . Сумма площадей маленьких треугольников $s = n\frac{1}{2}\Delta v\Delta t$

Тогда общая площадь (она же путь)

$$S + s = \frac{1}{2}v_0n\Delta t + n\frac{1}{2}\Delta v\Delta t = \frac{1}{2}n\Delta t(v_0 + \Delta v)$$

Средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{S + s}{t} = \frac{S + s}{n\Delta t} = \frac{1}{2}(v_0 + \Delta v)$$

С учетом того, что $v_0 - n\Delta v = 0$, а, следовательно, $v_0 = n\Delta v$ получим отношение начальной скорости к средней скорости

$$\frac{v_0}{\langle v \rangle} = \frac{n\Delta v}{\frac{1}{2}(n\Delta v + \Delta v)} = \frac{2n}{n + 1}$$

ОТВЕТ: $\frac{2n}{n + 1}$.

Критерии оценивания	Балл
Представлена идея решения задачи (например, идея графического решения)	1
Определен путь (например, через площадь)	1
Получено выражение для средней скорости	1
Представлена связь между начальной скоростью, количеством съеденных точек и изменением скорости при поедании точки	1
Получен правильный ответ	1