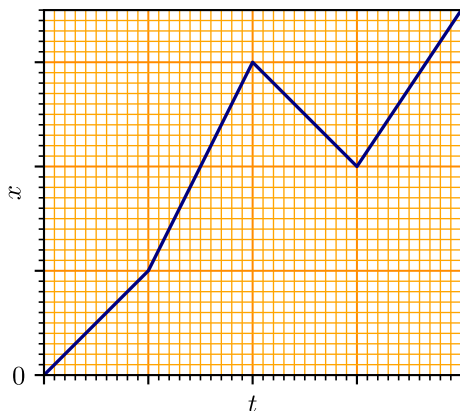


8 класс

Задача 1 4 балла

Катя едет на велосипеде по длинной прямой аллее парка. График зависимости координаты Кати вдоль аллеи от времени приведён на рисунке. К сожалению, масштаб по осям оказался утерян. Во время поездки велокомпьютер показывает среднюю путевую скорость, рассчитанную на временном промежутке с момента старта до текущего времени. Известно, что её максимальное значение за время движения равно $v_0 = 6$ м/с.

1. Найдите максимальную величину мгновенной скорости Кати.
2. Определите среднюю путевую скорость Кати за время движения.
3. Определите модуль средней скорости Кати за время движения.

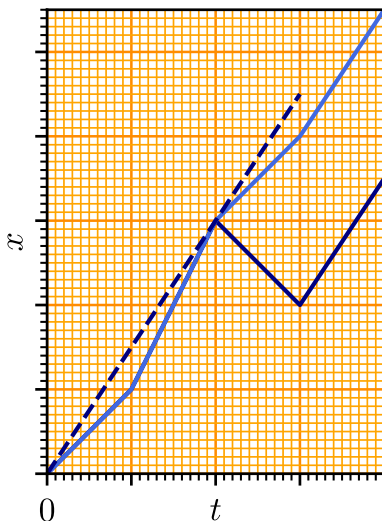


Построим график зависимости пройденного Катей пути от времени (светло-голубая линия на рисунке). Показания велокомпьютера равны коэффициенту наклона прямой, проведённой из начала координат в текущую точку зависимости пройденного пути от времени. Максимальное значение достигается в точке А. Найдём эту среднюю путевую скорость в единицах цен деления

осей графика.

$$v_0 = \frac{30 \text{ ед. длины}}{20 \text{ ед. времени}} = 1,5 \text{ ед. скорости.}$$

Используя $v_0 = 6 \text{ м/с}$, получаем, что 1 ед. скорости = 4 м/с. Вычислим скорости, которые требуется найти.



Максимальная величина мгновенной скорости достигается на втором участке и равна:

$$v_1 = \frac{20 \text{ ед. длины}}{10 \text{ ед. времени}} = 2,0 \text{ ед. скорости} = 8 \text{ м/с.}$$

Средняя путевая скорость равна:

$$v_2 = \frac{55 \text{ ед. длины}}{40 \text{ ед. времени}} = 1,375 \text{ ед. скорости} = 5,5 \text{ м/с.}$$

Модуль средней скорости Кати за всё время движения:

$$v_2 = \frac{35 \text{ ед. длины}}{40 \text{ ед. времени}} = 0,875 \text{ ед. скорости} = 3,5 \text{ м/с.}$$

Ответ: 1. 8 м/с. 2. 5,5 м/с. 3. 3,5 м/с.

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Участник продемонстрировал понимание различия пути и перемещения	1,0
2	Получено $v_1 = 8$ м/с	1,0
3	Получено $v_2 = 5,5$ м/с	1,0
4	Получено $v_3 = 3,5$ м/с	1,0

Задача 2 3 балла

Василий обучается в художественной школе. Ему дали задание: нарисовать чёрный квадрат. Василий (для отработки навыков) взял много листов бумаги и нарисовал на каждом из них квадрат, площадь которого составляет четверть площади листа. Все квадраты получились абсолютно одинаковыми. Чтобы отчитаться о проделанной работе перед учителем, он сложил все листы в стопку (плотно прижав листы друг к другу, чтобы положить в портфель). Оказалось, что стопка листов представляет собой куб с длиной ребра $a = 5$ см, а число листов равно $N = 100$.

Определите среднюю объемную плотность одного листа бумаги с нарисованным чёрным квадратом, если известно, что поверхностная плотность бумаги $\sigma_1 = 0,08$ кг/м², а поверхностная плотность краски $\sigma_2 = 3,00$ кг/м². Поверхностная плотность — это масса единицы площади плоского однородного тела.

Поскольку стопка листов представляет собой куб с ребром a , то сторона листа также равна a . Значит, площадь закрашенной краской части листа равна $a^2/4$, а сторона черного квадрата равна $a/2$.

Масса стопки листов $M = Nm$, где m — масса одного листа. Масса листа бумаги складывается из массы самой бумаги и массы краски. Масса самой бумаги $\sigma_1 S_0 = \sigma_1 a^2$, а масса краски

$\sigma_2 \frac{S_0}{4} = \sigma_2 \frac{a^2}{4}$. Тогда масса одного листа

$$m = \sigma_1 a^2 + \sigma_2 \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} (4\sigma_1 + \sigma_2).$$

Объёмная плотность всей стопки (она же и будет объёмной плотностью одного листа с квадратом на нём)

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Nm}{a^3} = \frac{Na^2(4\sigma_1 + \sigma_2)}{4a^3} = \frac{N(4\sigma_1 + \sigma_2)}{4a} = 1660 \text{ кг/см}^3.$$

Ответ: $\rho = \frac{N(4\sigma_1 + \sigma_2)}{4a} = 1660 \text{ кг/м}^3.$

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Найдена площадь закрашенной части листа	1,0
2	Рассчитана масса одного листа $m = \frac{a^2}{4} (4\sigma_1 + \sigma_2)$	1,0
3	Получен ответ $\rho = \frac{N(4\sigma_1 + \sigma_2)}{4a} = 1660 \text{ кг/м}^3$	1,0

Задача 3 4 балла

На столе лежат три пружинки, имеющие одинаковые длины в нерастянутом состоянии, но разные коэффициенты жёсткости. Чтобы увеличить длину первой из них в два раза, необходимо совершить работу $A = 40$ мДж, а второй — работу $3A$. Чтобы растянуть первую и третью пружины, соединённые параллельно, на $\Delta l = 6$ см, необходимо приложить силу $F = 21$ Н. Коэффициент жёсткости третьей пружины в два раза больше, чем у второй.

Все три пружины соединили последовательно. Какую силу нужно приложить, чтобы увеличить длину конструкции в три раза?

Пусть l_0 — длина пружин в нерастянутом состоянии, k_i — коэффициент жёсткости i -й пружины. Работы, необходимые для растяжения первой и второй пружин на l_0 :

$$A = \frac{k_1 l_0^2}{2}, \quad 3A = \frac{k_2 l_0^2}{2},$$

откуда $k_2 = 3k_1$. Кроме того, $k_3 = 2k_2$. Обозначим $k_1 = k$. Тогда коэффициенты жёсткости всех трёх пружин равны k , $3k$, $6k$ соответственно. Из указанной выше формулы также выразим $l_0 = \sqrt{\frac{2A}{k}}$.

Соединим параллельно первую и третью пружины. Эффективный коэффициент жёсткости такой системы равен $k + 6k = 7k$, поэтому $F = 7k\Delta l$, откуда $k = \frac{F}{7\Delta l}$.

При соединении всех трёх пружин последовательно складываются обратные жёсткости:

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{k} + \frac{1}{3k_0} + \frac{1}{6k_0},$$

откуда $k_0 = \frac{2k}{3}$ — эффективная жёсткость. Начальная длина

конструкции $3l_0$, удлинение равно $6l_0$, поэтому искомая сила

$$F' = \frac{2k}{3} \cdot 6l_0 = 4\sqrt{\frac{2FA}{7\Delta l}} = 8 \text{ Н.}$$

Ответ: $F' = 4\sqrt{\frac{2FA}{7\Delta l}} = 8 \text{ Н.}$

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	$A = \frac{k_1 l_0^2}{2}$ или $3A = \frac{k_2 l_0^2}{2}$	0,5
2	Получено соотношение коэффициентов жёсткости k , $3k$, $6k$	0,5
3	Эффективная жёсткость $k_1 + k_2$ при параллельном соединении	0,25
4	$k = \frac{F}{7\Delta l}$	0,5
5	Эффективная жёсткость $(k_1^{-1} + k_2^{-1} + k_3^{-1})^{-1}$ при последовательном соединении	0,25
6	Удлинение конструкции в последнем случае $6l_0$	0,5
7	$F' = 4kl_0$	0,5
8	Получен ответ $F' = 4\sqrt{\frac{2FA}{7\Delta l}} = 8 \text{ Н}$ (оценивается аналитическое выражение и числовой ответ)	$0,5 \times 2$

Задача 4 4 балла

Рассмотрим открытые сообщающиеся сосуды площадью поперечного сечения $S = 12 \text{ см}^2$ каждый, в которые налита вода. В левый сосуд аккуратно наливают слой масла высотой $h = 6 \text{ см}$, а затем помещают однородный цилиндр высотой $H = 20 \text{ см}$ и площадью поперечного сечения $S/3$. На сколько изменился уровень воды в правом сосуде по сравнению с начальным моментом, когда в сосудах была только вода? Плотности воды, масла и однородного цилиндра равны $\rho_{\text{в}} = 1,0 \text{ г/см}^3$, $\rho_{\text{м}} = 0,9 \text{ г/см}^3$, $\rho_{\text{ц}} = 0,8 \text{ г/см}^3$ соответственно. Вода и масло не смешиваются. Изначально в сосудах достаточно много воды, так что масло всё время остаётся только в левом сосуде.

Заметим, что плотность цилиндра меньше плотности обеих жидкостей, поэтому он будет плавать в левом сосуде.

Используем метод сил, действующих на дно. Объясним его применение на примере обычного сосуда с плоским дном площадью S_0 , в котором в воде плавает тело массой m_0 . Сила давления на дно $F = \rho_{\text{в}} g h_0 S_0$, где h_0 — уровень воды. Она равна по величине силе, действующей на систему тел «жидкость и плавающие в ней тела» со стороны дна. Последняя по закону равновесия равна силе тяжести, действующей на эти тела: $F = (m_{\text{в}} + m_0)g$. Таким образом, после того, как тело поместили в воду, уровень увеличился на $\Delta h = \frac{m_0}{\rho_{\text{в}} S_0}$. Обратите внимание, результат не зависит от формы тела и его плотности. Главное, чтобы оно плавало в воде.

Для формального применения этого метода, в данной задаче удобно считать, что сообщающиеся сосуды соединяются у горизонтального дна. Очевидно, ответ не зависит от формы трубки, их соединяющей. После всех манипуляций сила тяжести, действующая на систему тел «вода, масло и погруженное тело» возросла на

$$\Delta F = (m_{\text{м}} + m)g = \rho_{\text{м}} g h S + \frac{\rho_{\text{ц}} g H S}{3}.$$

Здесь использованы обозначения: $m_{\text{м}}$ — масса налитого

масла, m — масса цилиндра. С другой стороны,

$$\Delta F = \rho_{\text{в}} g \Delta h \cdot 2S,$$

где Δh — искомое изменение высоты. Таким образом,

$$\Delta h = \frac{\rho_{\text{м}} h}{2\rho_{\text{в}}} + \frac{\rho_{\text{л}} H}{6\rho_{\text{в}}} = 5,4 \text{ см.}$$

Ответ не зависит от того, плавает тело только в масле или сразу в двух жидкостях. Главное, что плавает.

Ответ: $\Delta h = \frac{\rho_{\text{м}} h}{2\rho_{\text{в}}} + \frac{\rho_{\text{л}} H}{6\rho_{\text{в}}} = 5,4 \text{ см.}$

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Обосновано плавание тела	1,0
2	Метод 1. Идея использовать метод сил на дно	1,0
3	Метод 1. $\Delta F = (m_{\text{м}} + m)g = \rho_{\text{м}} g h S + \frac{\rho_{\text{л}} g H S}{3}$	0,5
4	Метод 1. $\Delta F = \rho_{\text{в}} g \Delta h \cdot 2S$	0,5
5	Метод 2. Найдена высота столба масла $3h/2$	0,5
6	Метод 2. Найдена глубина погружения тела в воду	0,5
7	Метод 2. Обосновано, что тело плавает сразу в двух жидкостях	0,5
8	Метод 2. Верное уравнение, позволяющее найти Δh из закона сообщающихся сосудов	0,5
9	Получен ответ $\Delta h = \frac{\rho_{\text{м}} h}{2\rho_{\text{в}}} + \frac{\rho_{\text{л}} H}{6\rho_{\text{в}}} = 5,4 \text{ см}$ (оценивается аналитическое выражение и числовой ответ)	$0,5 \times 2$

Баллы, полученные за методы 1 и 2 не суммируются.

Задача 5 5 баллов

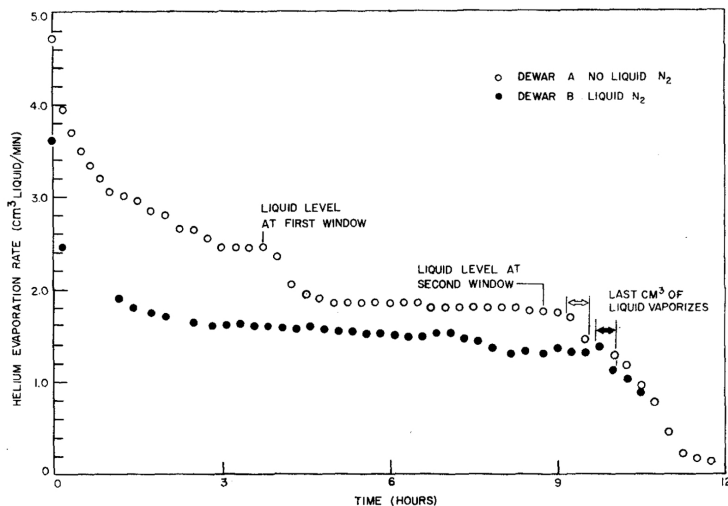
Для хранения и транспортировки веществ с поддержанием низких температур используют сосуд Дьюара. Он представляет собой сосуд с двойными стенками, в пространстве между которыми поддерживается высокий вакуум.

Рассмотрим сосуд Дьюара, внутри которого находится жидкий гелий при температуре кипения. Из-за того, что в пространстве между стенками всё-таки присутствует воздух, неизбежны тепловые потери. Со временем жидкий гелий испаряется. На рисунке белыми точками изображена зависимость скорости испарения гелия (в $\text{см}^3/\text{мин}$) от времени (в часах). Известно, что за время эксперимента весь гелий испарился. Определите начальный объём гелия в сосуде.

Чтобы уменьшить тепловые потери, используют модернизированную конструкцию сосуда Дьюара. Снаружи добавляют дополнительную прослойку, которая заполнена жидким азотом при температуре кипения. Чтобы использовать сосуд для проведения оптических экспериментов при низких температурах, часть стенок оставляют свободной от прослойки с жидким азотом. Эта часть соприкасается с окружающей средой. На рисунке чёрными точками изображена зависимость скорости испарения гелия от времени в этом случае. Оцените долю площади поверхности, соприкасающуюся с прослойкой.

Считайте, что мощность теплового потока через прослойку сосуда пропорциональна разности температур на её границах и площади поверхности. Остальными потерями пренебрегите. Температура кипения жидкого гелия $t_{\text{He}} = -268,9^\circ\text{C}$, жидкого азота $t_{\text{N}_2} = -195,8^\circ\text{C}$. Температура окружающей среды $t_0 = 20,0^\circ\text{C}$.

Указание. Как видно из графиков, в реальном эксперименте скорость испарения гелия меняется со временем. Чтобы получить наиболее точный ответ на второй вопрос, рассматривайте участки графиков, на которых процесс установился, и это изменение не велико.



Для решения первого пункта достаточно посчитать площадь под первым графиком, разобравшись с единицами измерения. Авторский ответ $V = 1460 \text{ см}^3$. При нахождении площади рекомендуется на рисунке нарисовать координатную сетку и посчитать количество попавших в искомую область квадратов сетки.

Сравним мощности P_1 и P_2 тепла, передающегося внутрь сосуда сквозь стенки в каждом из случаев. Пусть S — полная площадь поверхности, α — искомая часть. Тогда

$$P_1 = \kappa \cdot S \cdot (t_0 - t_{\text{He}}),$$

$$P_2 = \kappa \cdot \alpha S \cdot (t_{\text{N}_2} - t_{\text{He}}) + \kappa \cdot (1 - \alpha) S \cdot (t_0 - t_{\text{He}}).$$

Здесь κ — постоянный коэффициент пропорциональности. Отношение мощностей $\beta = P_1/P_2$ оценим из графиков. В силу уравнения теплового баланса оно равно отношению средних скоростей испарения гелия. Действительно, на пологом участке для первого сосуда средняя скорость равна $1,8 \text{ см}^3/\text{мин}$, а для второго — $1,5 \text{ см}^3/\text{мин}$. Таким образом,

$$\beta = \frac{1,8 \text{ см}^3/\text{мин}}{1,5 \text{ см}^3/\text{мин}} = 1,2.$$

Из уравнений, записанных выше,

$$\beta = \frac{t_0 - t_{\text{He}}}{(t_0 - t_{\text{He}}) - \alpha \cdot (t_0 - t_{\text{N}_2})},$$

$$\alpha = \frac{(t_0 - t_{\text{He}})(\beta - 1)}{\beta(t_0 - t_{\text{N}_2})} = 0,22.$$

Ответ: 1) $V \approx 1460 \text{ см}^3$. 2) $\alpha \approx 0,22$.

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Участник приступил к решению задачи (записал свои соображения по существу вопроса)	0,5
2	Идея нахождения площади	1,0
3	Обоснованный ответ $V \in [1150; 1750] \text{ см}^3$	1,0
4	Записаны мощности тепловых потерь в двух случаях	$0,5 \times 2$
5	Идея нахождения отношения скоростей	0,5
6	Получена связь β и α (возможно, в неявном виде и с подстановкой чисел)	0,5
7	Обоснованный ответ $\alpha \in [0,11; 0,33]$	0,5