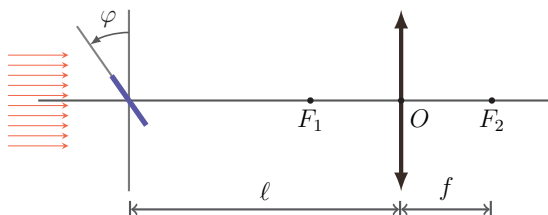


9 класс

Задача 1

На оптической оси F_1F_2 тонкой собирающей линзы расположена небольшая плоскопараллельная пластинка толщиной d , вращающаяся вокруг оси, перпендикулярной F_1F_2 . Вдоль оптической оси распространяется параллельный пучок света. Найдите количество и положение каждого из изображений пучка, даваемых линзой, в зависимости от угла поворота пластинки φ . Размерами пластинки по сравнению с диаметром линзы D и её фокусным расстоянием $f = F_1O = F_2O$, а также отражением и преломлением на торцах пластинки пренебрегите.



Сначала рассмотрим интервал углов поворота пластинки $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$.

При прохождении пучка через плоскопараллельную пластинку происходит смещение лучей, но при этом, как известно, каждый луч на выходе остаётся параллелен изначальному направлению распространения (в данном случае — оптической оси линзы). А поскольку пучок лучей, падающий на собирающую линзу параллельно оптической оси, фокусируется в дальнем фокусе линзы, все лучи, прошедшие либо мимо пластинки, либо через неё, собираются в фокусе F_2 . Этот результат никак не зависит от угла φ .

Второй тип интересующих нас лучей — это лучи, отразившиеся от пластинки. Угол падения лучей на пластинку равен $\psi = 90^\circ - \varphi$, он совпадает с углом отражения, что приводит к тому, что угол между отражёнными лучами и оптической осью

системы равен $\psi = 2 \cdot (90^\circ - \varphi)$. С ростом φ угол ψ уменьшается и при достижении критического значения $\psi_{\text{кр}}$, определяемого как

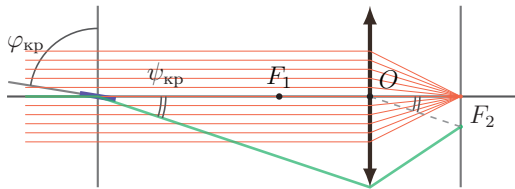
$$\operatorname{tg} \psi_{\text{кр}} = \frac{D}{2\ell} = \operatorname{tg} [2(90^\circ - \varphi_{\text{кр}})] \Rightarrow \varphi_{\text{кр}} = 90^\circ - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{D}{2\ell} \right),$$

отражённые лучи начинают также попадать на линзу. Такие лучи фокусируются в точку на фокальной плоскости, находящуюся на расстоянии $f \operatorname{tg} \psi = -f \operatorname{tg} 2\varphi$ от оптической оси. Отметим, что $\varphi_{\text{кр}} > 45^\circ$.

Таким образом, при увеличении φ от 0 до 90° поведение рефлексов на фокальной плоскости выглядит следующим образом: при всех φ обязательно есть как минимум одно изображение, сформированное в дальнем фокусе, F_2 ; при достижении φ значения $\varphi_{\text{кр}}$ возникает ещё одно изображение, находящееся на расстоянии $fD/2\ell$ от F_2 ; при дальнейшем увеличении φ второе изображение движется по направлению к фокусу F_2 , в которое и приходит в момент, когда φ достигает 90° .

При дальнейшем повороте пластинки, в диапазоне $90^\circ < \varphi < 180^\circ$, происходит зеркально симметричная картина: второй рефлекс продолжает движение в прежнем направлении (но уже от фокуса) и исчезает при достижении расстояния $fD/2\ell$ от F_2 .

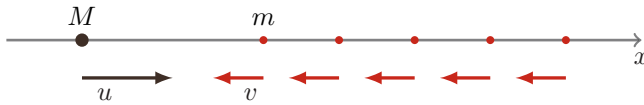
Ход лучей при критическом $\varphi_{\text{кр}}$ показан на рисунке. Зелёным цветом отмечен один из отражённых от пластинки лучей.



Критерии оценивания	Балл
Лучи, не преломлявшиеся на пластинке, и лучи, прошедшие пластинку насквозь, остаются параллельными опт. оси и фокусируются в F_2 ;	1.0
Есть отразившиеся от пластинки лучи, они тоже могут попадать на линзу; вычисление критического угла;	1.0
Построение изображения от лучей второго типа, описание динамики поведения	1.0

Задача 2

На гладкую прямую проволоку нанизаны бусины: одна большая бусина массы M и N малых бусин массы m каждая. В начальный момент времени все малые бусины движутся с одинаковыми скоростями (их проекции равны $v_x = -v < 0$) навстречу большой бусине, имеющей скорость $u_x = u > 0$. Все соударения между бусинами абсолютно упругие. Найдите конечную скорость самой правой бусины.



Перейдём в систему отсчёта, движущуюся со скоростью v справа налево: в ней вся колонна малых бусин изначально неподвижна, а большая частица налетает на них со скоростью $u'_x = u + v$. Первое столкновение с крайней левой бусиной t приводит к тому, что частица M передаёт часть своего импульса бусине t (после удара $u''_x < u'_x$), та приобретает скорость v''_x , направленную направо (ниже мы её вычислим). Затем следует череда соударений малых бусин. При каждом соударении двух бусин одинаковой массы происходит передача импульса от движущейся частицы к неподвижной:

$$\text{сохранение импульса: } mv_1 = mv'_1 + mv'_2$$

$$\text{сохранение кин. энергии: } \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2} \iff (1)$$

$$\iff v'_1 v'_2 = 0 \iff \begin{cases} v'_1 = 0, & v'_2 = v_1, \\ v'_1 = v_1, & v'_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

(Ясно, что второй вариант соответствует тому, что первая частица прошла вторую насквозь, и нам не подходит. Остаётся первый, $v'_1 = 0$, $v'_2 = v_1$, который и заключается в обмене скоростями.) Поэтому каждое соударение в цепочке бусин t есть передача всей скорости от налетающей к неподвижной, откуда следует,

что конечная скорость крайней правой бусины равна скорости крайней левой бусины, приобретённой в следствие самого первого соударения с бусиной M . Вычисляем (один штрих — до соударения, два штриха — после):

$$\begin{cases} Mu'_x = Mu''_x + mv''_x \\ Mu'^2_x = Mu''^2_x + mv''^2_x \end{cases} \Rightarrow v''_x \cdot [v''_x(m + M) - 2Mu'_x] = 0 \iff \quad (3)$$

$$\iff \begin{cases} v''_x = 0, \\ v''_x = \frac{2Mu'_x}{m + M}. \end{cases} \quad (4)$$

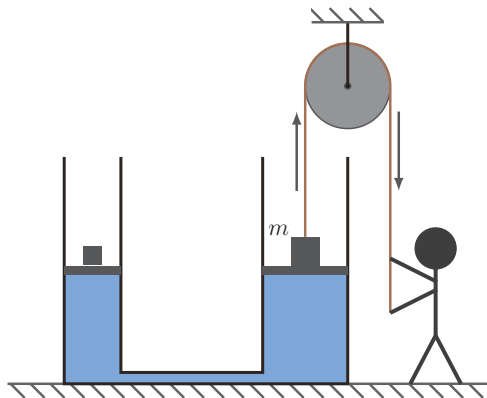
Мы снова отмечаем вариант прохождения частиц сквозь друг друга, затем обратно переходим в лабораторную систему отсчёта и получаем ответ:

$$v_{\text{прав. част.}} = v''_x - v = \frac{2M(u + v)}{m + M} - v = \frac{M(2u + v) - mv}{m + M}. \quad (5)$$

Критерии оценивания	Балл
ЗСИ+ЗСЭ для соударения M с m , определение скорости малой бусины после удара;	1.0
Соударение бусин одинаковой массы, “обмен скоростями”;	1.0
Описание передачи полученного от M при первом ударе импульса слева направо, правильный ответ.	1.0

Задача 3

Колена сообщающихся сосудов залиты жидкостью и закрыты лёгкими поршнями, на которые положены массивные грузы. В положении равновесия уровни жидкости совпадают. Школьник Вася начинает медленно поднимать правый груз за верёвку, переброшенную через блок. Известно, что к моменту отрыва груза от поршня Васей была совершена работа A . Найдите, насколько сместился поднимаемый груз, если известна его масса, m . Трение в системе отсутствует, ускорение свободного падения g .

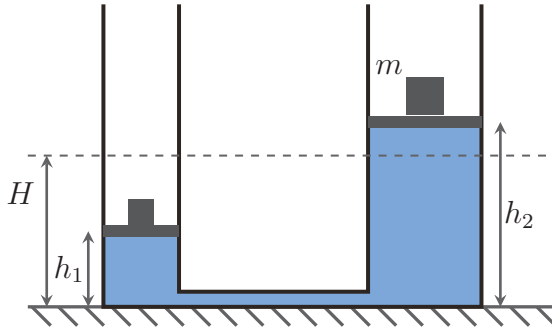


Пусть начальная высота, на которой находились поршни, равна H , площади сечений сосудов — S_1 и S_2 , плотность жидкости — ρ . Обозначения высот приведены на рисунке. Записываем:

равенство давлений в начале: $\frac{M}{S_1} = \frac{m}{S_2}$, (6a)

сохранение массы жидкости: $S_1(H - h_1) = S_2(h_2 - H)$, (6b)

равенство давлений в конце: $\rho(h_2 - h_1) = \frac{M}{S_1}$. (6c)



Совершённая работа вычисляется как разность потенциальных энергий системы в конце и в начале процесса:

$$A = mgh_2 + Mgh_1 + \rho g \left(\frac{h_2^2 S_2}{2} + \frac{h_1^2 S_1}{2} \right) - \left[mgH + Mgh + \rho g \left(\frac{H^2 S_2}{2} + \frac{H^2 S_1}{2} \right) \right]. \quad (6d)$$

Далее, в задаче требуется определить сдвиг правого поршня, то есть $h_2 - H$. Чтобы найти его, преобразуем выражение для совершённой работы (6d):

$$A = mg(h_2 - H) + Mg(h_1 - H) + \frac{\rho g}{2} [S_2(h_2^2 - H^2) + S_1(h_1^2 - H^2)] \stackrel{(6b)}{=} \quad (7a)$$

$$= mg(h_2 - H) - Mg(h_2 - H) \frac{S_2}{S_1} + \frac{\rho g}{2} \left[S_2(h_2 - H)(h_2 + H) - S_1(h_2 - H) \frac{S_2}{S_1} (h_1 + H) \right] = \quad (7b)$$

$$= (h_2 - H) \left\{ \underbrace{mg - \frac{MgS_2}{S_1}}_{(6a)} + \frac{\rho g}{2} [S_2(h_2 + H) - S_2(h_1 + H)] \right\} =$$

$$= (h_2 - H) \frac{\rho g}{2} (h_2 - h_1) S_2 \stackrel{(6c)}{=} (h_2 - H) \frac{g}{2} \frac{M}{S_1} S_2 \stackrel{(6a)}{=} \quad (7c)$$

$$= (h_2 - H) \frac{mg}{2} \Rightarrow \boxed{h_2 - H = \frac{2A}{mg}} \quad (7d)$$

Критерии оценивания	Балл
Равенство давлений вначале; равенство давлений в конце; сохранение массы жидкости; (это формулы (6a), (6b), (6c) по текущей версии); по по 0.5 балла за каждое;	1.5
Выражение для работы (6d);	1.0
Преобразования с подстановками и правильный ответ.	1.5

Задача 4

В наборе радиоэлементов есть два типа нелинейных резисторов: у одних сопротивление растёт с током, $R_1(I) = R_0 + \alpha I$, у других — падает, $R_2(I) = R_0 - \alpha I$ (R_0 и α — положительные константы; величину α считайте малой в том смысле, что в диапазоне исследуемых напряжений и токов сопротивление нелинейного элемента мало отличается от R_0).

- А) Найдите сопротивление цепи, составленной из последовательно соединённых N_1 сопротивлений первого типа и N_2 второго; к цепи приложено напряжение U .
- Б) Определите, в какой из схем выделяется больше тепла при малых напряжениях: если параллельно соединить элементы R_1 и R_2 , или же если так же соединить пару обычных резисторов сопротивлением R_0 каждое.

Указание: при малых x ($x \sim 0$) воспользуйтесь приближённым выражением для квадратного корня: $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm x/2$.

- А) При последовательном соединении напряжения складываются, а ток I , протекающий через цепь, равен току, текущему через каждый из резисторов. Поэтому полное сопротивление (обозначим его через R), удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} R &= N_1 R_1 + N_2 R_2 = (N_1 + N_2) R_0 + \alpha I (N_1 - N_2) = \\ &= \overbrace{(N_1 + N_2)}^N R_0 + \frac{\alpha U}{R} \overbrace{(N_1 - N_2)}^{\Delta N} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R^2 - R N R_0 - \alpha U \Delta N &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow R &= \frac{R_0 N \pm \sqrt{(N R_0)^2 + 4 U \alpha \Delta N}}{2}. \end{aligned}$$

По условию α малó, а значит остаётся лишь корень со

знаком плюс:

$$R = \frac{R_0 N + \sqrt{(NR_0)^2 + 4U\alpha\Delta N}}{2}. \quad (8)$$

Б) Пусть на обе цепи подано напряжение U . Тогда на обычной, линейной схеме, выделяется мощность

$$P_0 = \frac{2U^2}{R_0}. \quad (9)$$

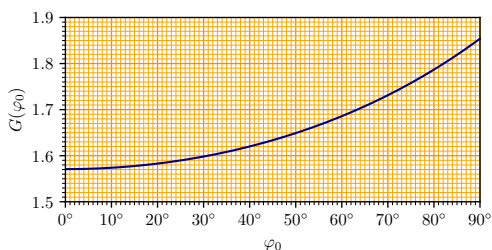
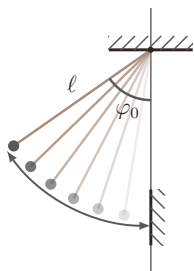
Вычислим мощность во второй цепи:

$$\begin{aligned} P' &= U^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \stackrel{(8)}{=} \\ &= U^2 \left(\frac{1}{R_0 + \sqrt{R_0^2 + 4\alpha U}} + \frac{1}{R_0 + \sqrt{R_0^2 - 4\alpha U}} \right) = \\ &= 2U^2 \left(\frac{1}{R_0 + R_0 \sqrt{1 + \frac{4\alpha U}{R_0^2}}} + \frac{1}{R_0 + R_0 \sqrt{1 - \frac{4\alpha U}{R_0^2}}} \right) \approx \\ &\approx \frac{2U^2}{R_0} \left(\frac{1}{1 + 1 + \frac{4\alpha U}{2R_0^2}} + \frac{1}{1 + 1 - \frac{4\alpha U}{2R_0^2}} \right) = \\ &= \frac{2U_0^2}{R_0} \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha U}{R_0} \right)^2} > P_0. \end{aligned}$$

Критерии оценивания	Балл
Пункт (А) - Квадратное уравнение	1.0
Пункт (А) - Его правильное решение;	1.0
Пункт (Б) — 3 балла: 0.5 балла за выражения для мощности в обычной схеме; 0.5 балла за выражения для мощности в нелинейной схеме; 0.5 балла за подстановку выражений нелинейных сопротивлений; 1.5 балла за раскрытие бесконечно малых и правильный ответ.	

Задача 5

Математический маятник представляет из себя точечный груз массы m , подвешенный на невесомой, нерастяжимой нити длины ℓ и совершающий колебания (в плоскости рисунка). Зависимость периода колебаний маятника от максимального угла отклонения от вертикали, φ_0 , может быть представлена в виде $\tau(\varphi_0) = G(\varphi_0) \cdot 4\sqrt{\ell/g}$. График функции $G(\varphi_0)$ приведён на рисунке. В нижней точке траектории груза ставят неподвижную вертикальную стенку, соударения груза с которой абсолютно упругие. Определите, с точностью 10° , на какой угол необходимо изначально отклонить груз, чтобы среднее (за очень большое время) значение силы давления, оказываемой грузом на стенку, было равно $mg/2$.



Средняя сила давления груза на стену определяется как переданный за большое время T импульс, отнесённый к T . Пусть за время T произошло N соударений со стенкой, при этом при каждом соударении передавался импульс Δp . Тогда средняя сила давления вычисляется как

$$F = \frac{N\Delta p}{T} = \frac{N\Delta p}{N\Delta t_1} = \frac{\Delta p}{\Delta t_1}, \quad (10)$$

где Δt_1 есть время между последовательными соударениями, которое равно полупериоду колебаний маятника (в силу того, что соударение с вертикальной стенкой происходит в нижней точке траектории):

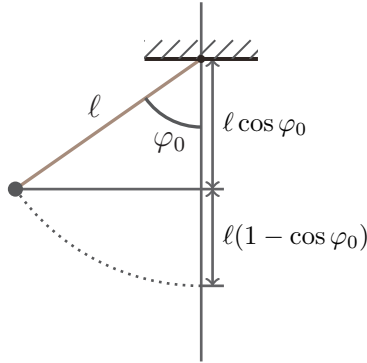
$$\Delta t_1 = \frac{\tau}{2}. \quad (11)$$

Передаваемый за один удар импульс вычисляется как

$$\Delta p = 2mv, \quad (12)$$

где

$$\frac{mv^2}{2} = mg\Delta h \Rightarrow v = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \varphi_0)}. \quad (13)$$



Поэтому для силы давления получаем

$$F = \frac{2\Delta p}{\tau(\varphi_0)} = \frac{4m\sqrt{2g\ell(1 - \cos \varphi_0)}}{\tau(\varphi_0)} = \quad (14)$$

$$= \frac{4m\sqrt{2g\ell(1 - \cos \varphi_0)}}{G(\varphi_0)4\sqrt{\ell/g}} = mg \frac{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_0)}}{G(\varphi_0)}, \quad (15)$$

откуда следует, что для ответа на поставленный вопрос необходимо найти, с указанной точностью, такой угол φ_0 , для которого

$$\frac{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_0)}}{G(\varphi_0)} = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Для этого по данному графику $G(\varphi_0)$ построим зависимость левой части последнего уравнения от φ_0 с шагом 10° (функцию

от косинуса вычислим на калькуляторе):

φ_0	$G(\varphi_0)$	$\sqrt{2(1-\cos \varphi_0)}$	$\sqrt{2(1-\cos \varphi_0)}/G(\varphi_0)$
0°	1.57	0	0
10°	1.57	0.17	0.11
20°	1.58	0.35	0.22
30°	1.60	0.52	0.32
40°	1.62	0.68	0.42
50°	1.65	0.85	0.51
60°	1.68	1	0.59
70°	1.73	1.15	0.66
80°	1.78	1.29	0.72
90°	1.85	1.41	0.76

Из таблицы видно, что искомое значение $\varphi_0 \in (40^\circ, 50^\circ)$.

Примечание: на самом деле, выражения (15) и (16) можно упростить, ведь $\sqrt{2(1-\cos \varphi_0)} = 2 \sin(\varphi_0/2)$.

Критерии оценивания	Балл
Формулы (10), (11) и (12) (или эквивалентное словесное описание) — по 0.5 балла за каждую;	1.5
Вычисление скорости (13);	1.0
Выражение (15) для силы и следствие (16);	1.0
Численный поиск ответа — построением таблицы или графика	1.5