Задания заключительного этапа олимпиады школьников СПбГУ по математическому моделированию и искусственному интеллекту 9-11 классы

Вариант задания заключительного этапа Олимпиады школьников СПбГУ по математическому моделированию и искусственному интеллекту 2023/24 учебного года состоял из трёх задач разных типов в рамках тематики Олимпиады. Каждая задача оценивалась определенным количеством баллов в зависимости от уровня сложности.

Наибольшая итоговая сумма баллов, которой оценивались ответы всех задач, была равна 100. Подсчет итоговой оценки осуществлялся путем суммирования баллов, выставленных за ответы каждой из задач. Оценка ответов по каждой задаче формировалась в зависимости от близости введённого ответа к точному ответу.

Задача 1: Математическое моделирование

Формулировка (Вариант 1)

У Вити был хороший телескоп и он наблюдал за одним небесным телом, которое двигалось по эллиптической орбите. Пользуясь своими наблюдениями и некоторыми дополнительными данными из открытых источников, Витя отмечал положения этого тела в течении длительного времени. Полученные данные он масштабировал некоторым образом и переводил их в плоскость орбиты наблюдаемого небесного тела, так что центр эллипса находится в точке (0, 0), а ось Ox направлена вдоль большой полуоси эллипса. В этом случае уравнение эллипса имеет канонический вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где параметр a — это длина большой полуоси, а параметр b — это длина малой полуоси.

Полученные данные находятся в файле “DataModel1.xls” и представляют собой числовой массив размера $10^3 \times 2$. В каждой строке находятся координаты положения небесного тела (x_i, y_i).
Задача заключается в том, чтобы найти значения параметров a, b, при которых достигается наименьшая квадратичная ошибка на данных, то есть следующая функция имеет наименьшее значение

$$I(a, b) = \sum_{k=1}^{10^3} \left(\frac{{x_k}^2}{a^2} + \frac{{y_k}^2}{b^2} - 1 \right)^2.$$

В качестве ответа введите значение параметра a, то есть длину большой полуоси, с точностью до трёх знаков после запятой.

Формулировка (Вариант 2)

У Вити был хороший телескоп и он наблюдал за одним небесным телом, которое двигалось по эллиптической орбите. Пользуясь своими наблюдениями и некоторыми дополнительными данными из открытых источников, Витя отмечал положения этого тела в течении длительного времени. Полученные данные он масштабировал некоторым образом и переводил их в плоскость орбиты наблюдаемого небесного тела, так что центр эллипса находится в точке (0, 0), а ось Ox направлена вдоль большой полуоси эллипса. В этом случае уравнение эллипса имеет канонический вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где параметр a — это длина большой полуоси, а параметр b — это длина малой полуоси.

Полученные данные находятся в файле “DataModel2.xls” и представляют собой числовой массив

размера $10^3 \times 2$. В каждой строке находятся координаты положения небесного тела (x_i, y_i).
Задача заключается в том, чтобы найти значения параметров a, b, при которых достигается наименьшая квадратичная ошибка на данных, то есть следующая функция имеет наименьшее значение

$$I(a, b) = \sum_{k=1}^{10^3} \left(\frac{{x_k}^2}{a^2} + \frac{{y_k}^2}{b^2} - 1 \right)^2.$$

В качестве ответа введите значение параметра a, то есть длину большой полуоси, с точностью до трёх знаков после запятой.

Формулировка (Вариант 3)

У Вити был хороший телескоп и он наблюдал за одним небесным телом, которое двигалось по эллиптической орбите. Пользуясь своими наблюдениями и некоторыми дополнительными данными из открытых источников, Витя отмечал положения этого тела в течении длительного времени. Полученные данные он масштабировал некоторым образом и переводил их в плоскость орбиты наблюдаемого небесного тела, так что центр эллипса находится в точке (0, 0), а ось Ox направлена вдоль большой полуоси эллипса. В этом случае уравнение эллипса имеет канонический вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где параметр a — это длина большой полуоси, а параметр b — это длина малой полуоси.

Полученные данные находятся в файле “DataModel3.xls” и представляют собой числовой массив размера $10^3 \times 2$. В каждой строке находятся координаты положения небесного тела (x_i, y_i).
Задача заключается в том, чтобы найти значения параметров a, b, при которых достигается наименьшая квадратичная ошибка на данных, то есть следующая функция имеет наименьшее значение

$$I(a, b) = \sum_{k=1}^{10^3} \left(\frac{{x_k}^2}{a^2} + \frac{{y_k}^2}{b^2} - 1 \right)^2.$$

В качестве ответа введите значение параметра a, то есть длину большой полуоси, с точностью до трёх знаков после запятой.

Задача 2: Классификация сигналов

Формулировка (Вариант 1)

Коля проводил эксперименты с некоторой электрической системой и замерял генерируемый этой системой сигнал при различных начальных параметрах, получая массив из 61 числа. Коля провёл 5500 экспериментов. Полученные данные представляют собой числовой массив размера 5500 на 61 и находятся в файле “WaveForm1.xlsx”

Оказалось, что изучаемая электрическая система имеет два различных режима работы.

Режим №1 генерировал сигнал, график которого представляет собой часть синусоиды.

Режим №2 генерировал сигнал, график которого представляет собой однократный плавно нарастающий и плавно затухающий импульс.

По имеющемуся массиву данных помогите Коле провести классификацию экспериментов.

В качестве ответа введите количество экспериментов, в которых система работала в Режиме №2. Ответом должно быть целое число.

Дополнительные комментарии к задаче о виде сигналов можно найти в pdf-файле “Olymp_ClusterTask.pdf”.

Формулировка (Вариант 2)

Коля проводил эксперименты с некоторой электрической системой и замерял генерируемый этой системой сигнал при различных начальных параметрах, получая массив из 61 числа. Коля провёл 5500 экспериментов. Полученные данные представляют собой числовой массив размера 5500 на 61 и находятся в файле “WaveForm2.xlsx”

Оказалось, что изучаемая электрическая система имеет два различных режима работы.

Режим №1 генерировал сигнал, график которого представляет собой часть синусоиды.

Режим №2 генерировал сигнал, график которого представляет собой однократный плавно нарастающий и плавно затухающий импульс.

По имеющемуся массиву данных помогите Коле провести классификацию экспериментов.

В качестве ответа введите количество экспериментов, в которых система работала в Режиме №2.

Ответом должно быть целое число.

Дополнительные комментарии к задаче о виде сигналов можно найти в pdf-файле “Olymp_ClusterTask.pdf”.

Формулировка (Вариант 3)

Коля проводил эксперименты с некоторой электрической системой и замерял генерируемый этой системой сигнал при различных начальных параметрах, получая массив из 61 числа. Коля провёл 5500 экспериментов. Полученные данные представляют собой числовой массив размера 5500 на 61 и находятся в файле “WaveForm3.xlsx”

Оказалось, что изучаемая электрическая система имеет два различных режима работы.

Режим №1 генерировал сигнал, график которого представляет собой часть синусоиды.

Режим №2 генерировал сигнал, график которого представляет собой однократный плавно нарастающий и плавно затухающий импульс.

По имеющемуся массиву данных помогите Коле провести классификацию экспериментов.

В качестве ответа введите количество экспериментов, в которых система работала в Режиме №2. Ответом должно быть целое число.

Дополнительные комментарии к задаче о виде сигналов можно найти в pdf-файле “Olymp_ClusterTask.pdf”.

Задача 3: Оптимизация

Формулировка (Вариант 1)

Рассмотрим некоторый товар, выпуском которого занимается 5 производителей. Будем считать, что реализация товара происходит на локальном рынке через торговую площадку единственного дистрибьютора (см. рисунок).

Цена выпуска товара отдельно взятым производителем i зависит от количества производимого им товара $x_i \geq 0$ следующим образом:

$$p_i(x_i) = p_i^0\left(1 + \frac{x_i}{c_i}\right),$$

где c_i — мощность производства i, а p_i^0 — базовая цена выпуска товара производителем i.

При этом, чем выше рыночная цена $\boldsymbol{p}$ выпуска товара, тем меньший объём продукции D готов реализовать дистрибьютор:

$$D = 1000\left(1 + \frac{10}{\boldsymbol{p}}\right).$$

Пусть значения базовых цен производства товара и значения мощностей производства даны в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1: Значения базовых цен производства

Out[ ]=

p_1^0	p_2^0	p_3^0	p_4^0	p_5^0
4	5	5	4	3

Таблица 2: мощности производства c_i

Out[∘]=

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
259	496	234	234	234

Найдите объёмы выпуска товара каждым из производителей, если рыночная цена $\boldsymbol{p}$ выпуска товара устанавливается путём возникновения на локальном рынке производителей *рыночного равновесия*, а именно:

$$\boldsymbol{p} \begin{cases} = p_i(x_i), & \text{если } x_i > 0, \\ \leq p_i(x_i), & \text{если } x_i = 0, \end{cases} \quad \text{для любого } i \text{ от } 1 \text{ до } 5.$$

В качестве ответа введите полученные объёмы выпуска товара каждым из производителей.

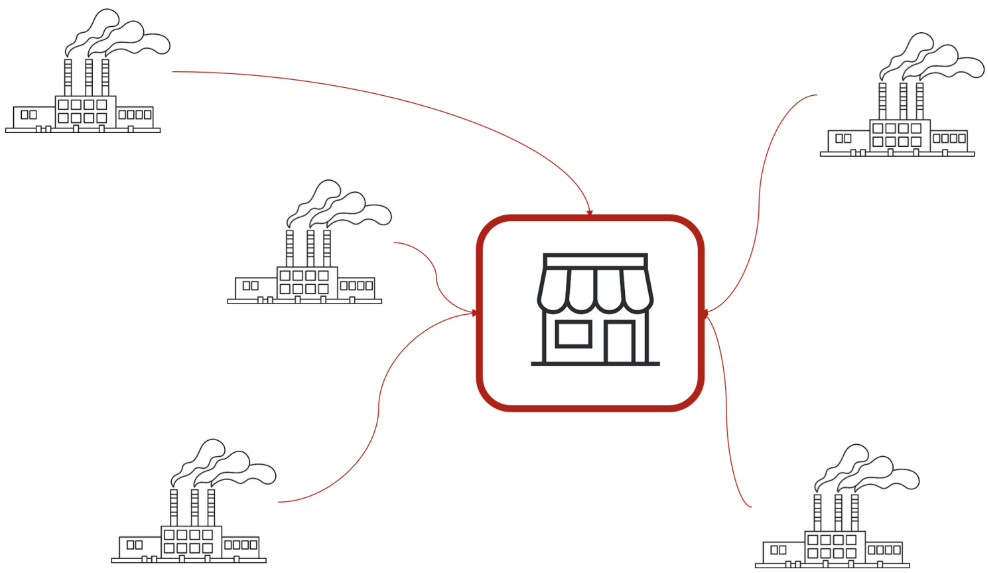
Пример ввода: 700, 705, 100, 200, 800

Пример вычисления цены выпуска: например, если $x_1 = 500$, то

$$p_1(x_1) = 4\left(1 + \frac{500}{259}\right) = 11.722$$

Формулировка (Вариант 2)

Рассмотрим некоторый товар, выпуском которого занимается 5 производителей. Будем считать, что реализация товара происходит на локальном рынке через торговую площадку единственного дистрибьютора (см. рисунок).



Цена выпуска товара отдельно взятым производителем i зависит от количества производимого им товара $x_i \geq 0$ следующим образом:

$$p_i(x_i) = p_i^0\left(1 + \frac{x_i}{c_i}\right),$$

где c_i — мощность производства i, а p_i^0 — базовая цена выпуска товара производителем i.

При этом, чем выше рыночная цена $\boldsymbol{p}$ выпуска товара, тем меньший объём продукции D готов реализовать дистрибьютор:

$$D = 1000\left(1 + \frac{10}{\boldsymbol{p}}\right).$$

Пусть значения базовых цен производства товара и значения мощностей производства даны в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1: Значения базовых цен производства

Out[◦]=

p_1^0	p_2^0	p_3^0	p_4^0	p_5^0
5	6	5	5	4

Таблица 2: мощности производства c_i

Out[◦]=

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
240	450	200	290	220

Найдите объёмы выпуска товара каждым из производителей, если рыночная цена $\boldsymbol{p}$ выпуска товара устанавливается путём возникновения на локальном рынке производителей *рыночного равновесия*, а именно:

$$\boldsymbol{p} \begin{cases} = p_i(x_i), & \text{если } x_i > 0, \\ \leq p_i(x_i), & \text{если } x_i = 0, \end{cases} \quad \text{для любого } i \text{ от } 1 \text{ до } 5.$$

В качестве ответа введите полученные объёмы выпуска товара каждым из производителей.

Пример ввода: 700, 705, 100, 200, 800

Пример вычисления цены выпуска: например, если $x_1 = 500$, то

$$p_1(x_1) = 5\left(1 + \frac{500}{240}\right) = 15.417$$

Формулировка (Вариант 3)

Рассмотрим некоторый товар, выпуском которого занимается 5 производителей. Будем считать, что реализация товара происходит на локальном рынке через торговую площадку единственного дистрибьютора (см. рисунок).

Цена выпуска товара отдельно взятым производителем i зависит от количества производимого им товара $x_i \geq 0$ следующим образом:

$$p_i(x_i) = p_i^0\left(1 + \frac{x_i}{c_i}\right),$$

где c_i — мощность производства i, а p_i^0 — базовая цена выпуска товара производителем i.

При этом, чем выше рыночная цена $\boldsymbol{p}$ выпуска товара, тем меньший объём продукции D готов реализовать дистрибьютор:

$$D = 1000\left(1 + \frac{12}{\boldsymbol{p}}\right).$$

Пусть значения базовых цен производства товара и значения мощностей производства даны в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1: Значения базовых цен производства

Out[∘]=

p_1^0	p_2^0	p_3^0	p_4^0	p_5^0
6	7	7	6	5

Таблица 2: мощности производства c_i

Out[∘]=

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
300	450	250	200	250

Найдите объёмы выпуска товара каждым из производителей, если рыночная цена $\boldsymbol{p}$ выпуска товара устанавливается путём возникновения на локальном рынке производителей *рыночного равновесия*, а именно:

$$\boldsymbol{p} \begin{cases} = p_i(x_i), & \text{если } x_i > 0, \\ \leq p_i(x_i), & \text{если } x_i = 0, \end{cases} \quad \text{для любого } i \text{ от } 1 \text{ до } 5.$$

В качестве ответа введите полученные объёмы выпуска товара каждым из производителей.

Пример ввода: 700, 705, 100, 200, 800