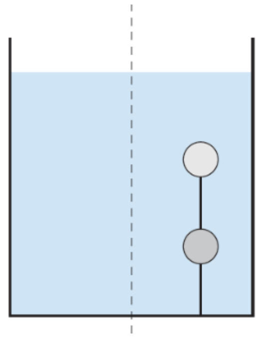
Условия, решения и разбалловка

Задача 1

Цилиндрический сосуд заполнен водой, а к его дну прикрепляют два связанных нитью шарика одинакового объема (см. рисунок). Плотность первого шарика 600 кг/м^3, плотность второго шарика 800 кг/м^3.



1. Найдите отношение сил натяжения нитей T_1/T_2, где T_1 и T_2 – силы натяжения нитей, прикрепленных к верхнему и нижнему шарику соответственно.

Сосуд раскручивают вокруг его оси с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с. Известно, что нить, удерживающая верхний шарик, стала образовывать угол α_1 с вертикалью такой, что $\mathrm{tg}\alpha_1 = 1/2$, а нить, прикрепленная к дну сосуда, образует с вертикалью угол $\alpha_2 = \pi/4$.

2. Найдите расстояния от первого и второго шарика до оси цилиндра.

Решение:

1. На верхний шарик действует сила натяжения нити T_1, сила Архимеда $\rho_{в} gV$ и сила тяжести $\rho_1 gV$, где V – объемы шариков. Условие равновесия имеет вид:
$$T_1 + \rho_1 gV = \rho_{в} gV$$
Аналогично для второго шарика условие равновесия запишем как:
$$T_1 + \rho_{в} gV = T_2 + \rho_2 gV$$
Выражая отсюда T_1 и T_2 получаем, что отношение сил натяжения равно:
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\rho_{в} - \rho_1}{2\rho_{в} - (\rho_1 + \rho_2)} = \frac{2}{3}$$
2. Если шар находится во вращающемся сосуде на расстоянии r от оси сосуда, то к вертикальной силе Архимеда добавляется горизонтальная, направленная по радиусу к оси вращения и равная $\rho_{в}\omega^2 r$. Записывая второй закон Ньютона для шариков, находим, что расстояния от оси сосуда до шариков равны:
$$r_1 = \frac{g}{\omega^2}\frac{\rho_{в} - \rho_1}{\rho_1}\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{10}{3} \text{ м}$$
$$r_2 = \frac{g}{\omega^2}\frac{2\rho_{в} - (\rho_1 + \rho_2)}{\rho_2}\mathrm{tg}\alpha_2 - \frac{\rho_1}{\rho_2} r_1 = 5 \text{ м}$$

Ответы для варианта 2

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{5}$$

$$r_1 = \frac{5}{4} \text{ м}$$

$$r_2 = \frac{10}{3} \text{ м}$$

Разбалловка

Ответ на первый вопрос	2 балла
Записаны корректно уравнения движения для шариков во втором случае на горизонтальную и вертикальную оси	По 3 балла за каждую ось
Ответ на второй вопрос	По 1 баллу за каждый ответ

Задача 2

Газ Ван-дер-Ваальса – это неидеальный газ, уравнение состояния которого для одного моля имеет вид:

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT,$$

где a, b – известные размерные положительные константы, p, V, T и R – давление, объем, температура и универсальная газовая постоянная соответственно. Внутренняя энергия одного моля газа Ван-дер-Ваальса зависит от температуры и занимаемого объема:

$$U=\frac{3}{2}RT-\frac{a}{V}.$$

С одним молем газа Ван-дер-Ваальса проводят циклический процесс, состоящий из изохорического нагрева $1\to2$, изобарического расширения $2\to3$, в котором объем увеличивается от $5b$ до $10b$, и процесса $3\to1$, который можно описать уравнением $p=\frac{a}{5b^2}-\frac{a}{V^2}$.

1. Найдите температуру газа в состояниях 1 и 3.
2. Докажите, что процесс $3\to1$ политропический и найдите его теплоемкость.
3. Найдите КПД данного цикла.

Решение:

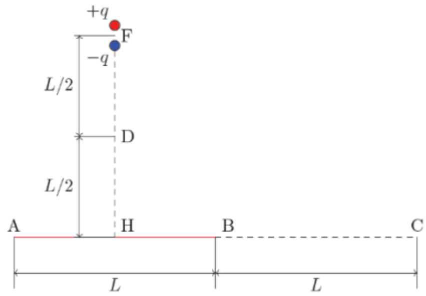
1. Используя уравнение состояния для газа Ван-дер-Ваальса и уравнение процесса, получаем, что:
$$RT_1=(V_1-b)\left(p+\frac{a}{V_1^2}\right)=\frac{4}{5}\frac{a}{b}\Rightarrow T_1=\frac{4}{5}\frac{a}{bR}$$
Аналогично $T_3=\frac{9}{5}\frac{a}{bR}$. Для последующих пунктов найдем, что $T_2=\frac{92}{100}\frac{a}{bR}$.
2. Запишем первое начало термодинамики для одного моля газа Ван-дер-Ваальса и воспользуемся определением теплоемкости и уравнение на внутреннюю энергию
$$\delta Q=pdV+dU\Rightarrow CdT=C_VdT+\frac{a}{V^2}dV+pdV$$
Подставляя уравнение процесса $p=\frac{a}{5b^2}-\frac{a}{V^2}$ получаем, что
$$CdT=C_VdT+\frac{a}{5b^2}dV\Rightarrow C=C_V+\frac{a}{5b^2}\frac{dV}{dT}$$
Из уравнения состояния и уравнения процесса получаем, что $\frac{dV}{dT}=\frac{5b^2}{a}R$, откуда получаем, что теплоемкость процесса постоянна и равна $\frac{5}{2}R$.
3. Теплота подводится к газу в процессах $1\to2$ и $2\to3$, отводится в процессе $3\to1$. По определению КПД цикла равно:
$$\eta=\frac{Q_{\text{наг}}+|Q_{\text{хол}}|}{Q_{\text{наг}}}=\frac{1}{51}$$
Ответы для варианта 2
$$T_1=\frac{9}{10}\frac{a}{bR},T_3=\frac{19}{10}\frac{a}{bR}$$
$$C=\frac{7}{2}R$$
$$\eta=\frac{1}{141}$$

Разбалловка

Ответ на первый вопрос	2 балла
Доказательство того, что процесс $3\to1$ политропа	2 балла
Найдена теплоемкость в процессе $3\to1$	2 балла
Найдено количество теплоты, полученное от холодильника и нагревателя	2 балла
Найдено КПД	2 балла

Задача 3

Нить AB длины L равномерно заряжена так, что ее суммарный заряд равен $Q > 0$.



1. Найдите напряженность электрического поля в точке C, находящейся на прямой AB на расстоянии L от точки B (см. рисунок).
2. Найдите напряженность электрического поля в точке D, которая находится на срединном перпендикуляре DH, $DH = L/2$.
3. Будем называть диполем систему из двух зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на фиксированном расстоянии $l \ll L$ друг от друга. Будем удерживать диполь в точке F, находящейся на прямой DH на расстоянии L от середины нити. Считая массу каждого из зарядов равной m найдите скорость диполя, когда он будет проходить точку D.

Решение

1. Разбивая заряженную нить на части и используя принцип суперпозиции, получаем, что поле в точке C равно
$$E_C = \frac{kQ}{2L^2}$$
2. Используя свойство эквивалентности напряженности равномерно заряженной нити и дуги кольца, получаем, что напряженность электрического поля в точке D равносильно полю дуги кольца радиуса DH и равно
$$E_D = 2\sqrt{2}\frac{kQ}{L^2}$$
3. Энергия взаимодействия диполя с электрическим полем равна $-qlE$. Действительно, представим, что заряды диполя находятся в одной точке. В этом случае работа по их перемещению из бесконечности в эту точку равна нулю. Если теперь мы заряды разведем на расстояние l, то работа будет равна $-qlE$, т.к. локально в этой области поле постоянно (размер l мал по сравнению с любыми другими размерами в задаче). Получается, что для того, чтобы найти изменение скорости диполя, мы можем записать закон сохранения энергии:
$$W_F = W_D + \frac{2mv^2}{2},$$
где W – потенциальная энергия взаимодействия поля и электрического поля. Найдя аналогично предыдущему пункту поле в точке F получаем, что скорость диполя будет в точке D будет равна
$$v = \sqrt{2\left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\frac{kqlQ}{mL^2}}$$

Ответы на второй вариант
$$E_C = \frac{1}{6}\frac{kQ}{L^2}$$
$$E_D = 2\sqrt{2}\frac{kQ}{L^2}$$
$$v = \sqrt{2\left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{10}}\right)\frac{kqlQ}{mL^2}}$$

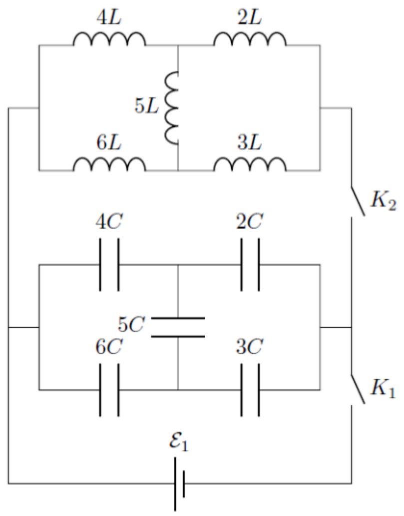
Разбалловка

Ответ на первый вопрос	3 балла
Ответ на второй вопрос	3 балла
Ответ на третий вопрос	4 балла

Задача 4

На схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент все ключи разомкнуты, конденсаторы не заряжены, источник $\mathcal{E}$ идеальный.

1. Клюок K_1 замыкают. Найдите заряд, который установится на конденсаторе $2C$.
2. Ключ K_1 размыкают, после чего замыкают ключ K_2. Чему равна сила тока через катушку $2L$ сразу после размыкания ключа K_2?
3. Чему равна частота колебаний общей силы тока в электрической цепи?



Решение:

1. Заметим, что в схеме два моста – из конденсаторов и из катушек. При этом оба моста сбалансированные.
2. При замкнутом ключе K_1 конденсатор $5C$ не будет заряжен. Поэтому в схеме две пары последовательно соединенных конденсаторов, откуда следует, что суммарное падение напряжение на конденсаторах $4C$ и $2C$ равно $\mathcal{E}_1$ при этом заряды на этих конденсаторах одинаковые. Записывая второе правило Кирхгофа получаем:
$$Q = \frac{4}{3}C\mathcal{E}$$
3. Поскольку при резких изменениях в цепях поток магнитного поля не может резко изменится, то сила тока, сразу после замыкания ключа K_2 равна нулю.
4. Используя тот факт, что оба моста сбалансированные мы можем найти эквивалентную емкость и эквивалентную индуктивность цепи, откуда получаем, что частота колебаний будет равна
$$\omega = \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{CL}}$$

Ответы на второй вариант

$$Q = \frac{5}{3}\,C\mathcal{E}$$
$$I = 0$$
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{CL}}$$

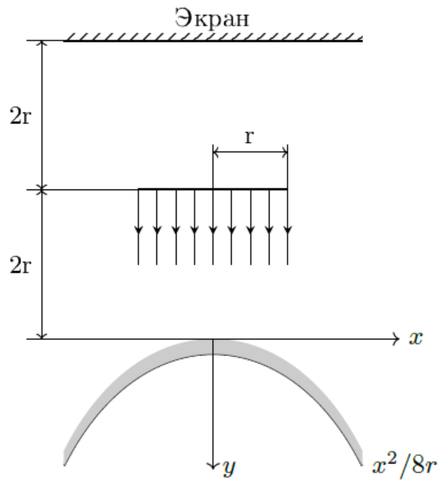
Разбалловка

Правильно записано второе правило Кирхгофа	2 балла
Ответ на первый вопрос	2 балла
Ответ на второй вопрос	2 балла
Правильно записаны уравнения для эквивалентных индуктивности и емкости	2 балла
Ответ на третий вопрос	2 балла

Задача 5

Прожектор радиуса r создает параллельный пучок света, направленный на параболическое зеркало, задаваемое уравнением $y = x^2/8r$ (см. рисунок). Пучок света параллелен оси y, расстояние от плоскости прожектора до вершины параболического зеркала $2r$.

1. Найдите угол падения на параболическое зеркало луча с координатой $x = r$.
2. За прожектором на расстоянии $2r$ от него располагается экран, плоскость которого параллельна плоскости прожектора. Найдите площадь блика на экране, создаваемого параболическим зеркалом.



Решение:

1. Угловой коэффициент касательной определяется производной и равен $x/4r$. При этом угловой коэффициент касательной равен тангенсу угла падения. В точке с координатой $x = r$ он равен ¼, т.е. угол падения равен
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$$
2. Заметим, что после отражения продолжения лучей соберутся в фокусе параболического зеркала в точке с ординатой $2r$ и абсциссой равной 0. Это легко проверить рассмотрев отражения луча с произвольным x. Таким образом в фокусе параболического зеркала располагается мнимый источник, который освещает экран Э. Границы освещенной области определяются крайней освещенной точкой на параболе и крайней точкой прожектора. Считая площадь получившегося кольца, получаем, что:
$$S = \pi r^2\left(\left(\frac{16}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = 79{,}9\,\pi r^2$$

Ответы на второй вариант

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

$$S = \frac{55}{4}\pi r^2$$

Разбалловка

Ответ на первый вопрос	4 балла
Необходимые построения для ответа на второй вопрос	3 балла
Ответ на второй вопрос	3 балла