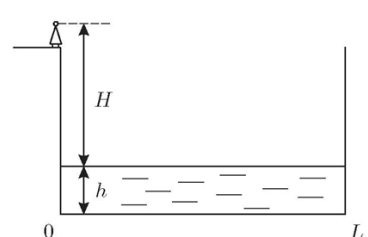


Заключительный этап.

10 класс

Задача 1.

Человек, стоя на краю высокого обрыва, смотрит на ровное плоское дно котлована шириной $L = 200$ м, заполненного водой глубиной $h = 1$ м (см. рисунок). Высота обрыва $H = 10$ м. Размеры котлована удовлетворяют неравенствам $L \gg H \gg h$. Показатель преломления воды равен $n = 1,3$. Как зависит от расстояния x до обрыва видимая глубина h_1 котлована?



Решение.

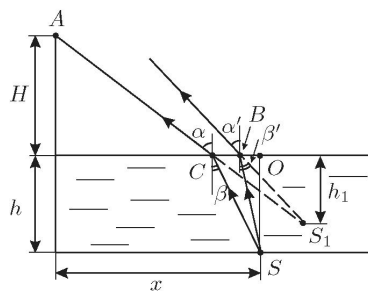


Рис. 1

Человек, находящийся в точке А (рис. 1) оценивает глубину водоёма по двум близким лучам, идущим из точек В и С. Ему кажется, что лучи исходят не из точки S, а из точки S₁, и поэтому видимая глубина водоёма h_1 . Изменения направлений лучей на поверхности воды подчиняются закону Снеллиуса:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = n$$

где n — показатель преломления воды, а углы α , β , α' , β' показаны на рисунке 1. Пусть δ — длина отрезка BC. Тогда из прямоугольных треугольников, показанных на рисунке 1, следует:

$$\delta = h(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta') = h_1(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha')$$

Поскольку углы α и α' , β и β' мало отличаются, то если $\alpha - \alpha' = \Delta\alpha$, $\beta - \beta' = \Delta\beta$.

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta' \approx \frac{\Delta\beta}{\cos^2 \beta}, \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha' \approx \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Подставляя полученные соотношения в δ , находим

$$h_1 = h \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}$$

Записывая закон Снеллиуса для маленьких приращений углов:

$$\cos \alpha \Delta\alpha = n \cos \beta \Delta\beta, \quad \text{откуда} \quad h_1 = \frac{h}{n} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\cos^3 \beta} = \frac{h}{n} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}\right)^{3/2}}.$$

Для угла α из рисунка 1 находим

$$\sin \alpha = \frac{x - OB}{\sqrt{(x - OB)^2 + H^2}} \approx \frac{x}{\sqrt{x^2 + H^2}}$$

так как $OB \ll x$ при малых h .

Осталось подставить полученное выражение для $\sin \alpha$ в выражение для h_1 и произвести алгебраические преобразования:

$$h_1 = \frac{n^2 h H^3}{((n^2 - 1)x^2 + n^2 H^2)^{\frac{3}{2}}}$$

График этой зависимости представлен на рисунке 2. Видно, что вдали от обрыва водоём кажется более мелким.

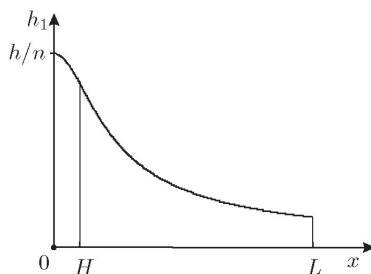


Рис. 2

Ответ: $h_1 = \frac{n^2 h H^3}{((n^2 - 1)x^2 + n^2 H^2)^{\frac{3}{2}}}$

Критерии оценивания

1. Правильно записан закон Снеллиуса для двух лучей, испущенных точкой на дне. (+1 балл)
2. Правильно выполнено построение, позволяющее определить положение изображения точки на дне. (+2 балла)
3. Правильно получена связь между глубиной водоёма, кажущейся глубиной и углами наблюдения. (+3 балла)
4. Правильно получены геометрические соотношения (или им аналогичные) для определения связи между глубиной водоема и горизонтальной координатой точки на дне. (+2 балла)
5. Правильно получена искомая зависимость (+2 балла)

Задача 2. Осторожно, весна! На краю крыши висят сосульки конической формы, геометрически подобные друг другу, но разной длины. После резкого потепления от $T_1 = 0^\circ\text{C}$ до $T_2 = 10^\circ\text{C}$ самая маленькая сосулька длиной $l = 10$ см растаяла за время $t = 2$ часа. За какое время растает большая сосулька длиной $L = 30$ см, если внешние условия не изменятся?

Возможное решение

Количество тепла. ΔQ , поступающее к сосульке из внешней среды за небольшой промежуток времени Δt , пропорционально площади её боковой поверхности S и этому промежутку Δt . Это тепло идёт на плавление льда, при неизменной его температуре 0°C , то есть $\Delta Q = \Delta m \lambda$, где λ - удельная теплота плавления льда. Масса Δm растаявшего за время Δt льда равна $\rho S \Delta h$, где ρ - плотность льда, а толщина растаявшего слоя Δh пропорциональна, изменению длины сосульки Δl , поскольку сосулька тает с поверхности, сохраняя свою форму. Получаем, что

$$\Delta Q = \Delta m \lambda = \rho S \Delta h \lambda \sim \rho S \Delta l \lambda \sim S \Delta t$$

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} \sim \frac{1}{\rho \lambda} = \text{const.}$$

Таким образом, длина сосульки убывает с постоянной скоростью. Поэтому сосулька длиной L растает за время

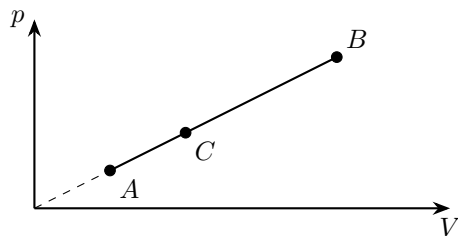
$$t' = \frac{L}{l} t = 6 \text{ часов.}$$

Ответ: 6 часов.

Критерии оценивания

1. Правильно получена связь между количеством получаемой извне теплоты и площадью поверхности сосульки. (+1 балл)
2. Правильно получена связь между количеством получаемой извне теплоты и временем. (+1 балл)
3. Указано, что количество полученной извне теплоты прямо пропорционально массе растаявшей части сосульки. (+1 балл)
4. Правильно получена связь между массой растаявшей части сосульки и изменением длины сосульки. (+2 балла)
5. Получена связь между изменением длины сосульки и промежутком времени. (+1 балл)
6. Сделан вывод о постоянстве скорости изменения длины сосульки. (+2 балла)
7. Правильно определено время таяния большой сосульки (+2 балла)

Задача 3. Некоторое количество идеального одноатомного газа участвует в процессе $A - B - C$, представленном на pV -диаграмме. Температуры в точках A и B равны соответственно T_1 и T_2 . Найдите температуру T_3 в точке C , если известно, что точка C делит отрезок AB в отношении $1 : 3$.



Возможное решение

По условию известно, что точка C делит отрезок AB в отношении $1 : 3$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} = \frac{V_3 - V_1}{V_2 - V_1} = n.$$

Прямая на pV -диаграмме задается уравнением $P = \alpha V$. С учетом уравнения состояния идеального газа получаем

$$PV = \nu RT \rightarrow \alpha V^2 = \nu RT.$$

Выражаем объемы в точках A , B и C через температуры и получаем

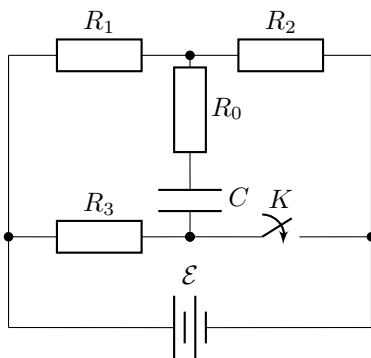
$$n = \frac{\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}} = \frac{\sqrt{T_3/T_1} - 1}{\sqrt{T_2/T_1} - 1} = n \rightarrow n\sqrt{T_2/T_1} - n + 1 = \sqrt{T_3/T_1}.$$

$$\text{Ответ: } T_3 = T_1 \left(n\sqrt{T_2/T_1} - n + 1 \right)^2$$

Критерии оценивания

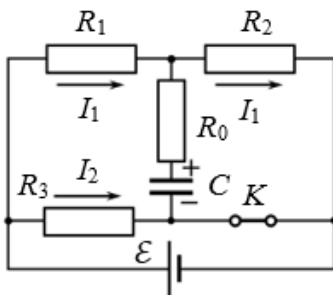
1. Правильно записано соотношение между объёмами в точках процесса. (+2 балла)
2. Правильно получена связь между объемом и температурой в процессе. (+2 балла)
3. Правильно получена искомая температура. (+2 балла)

Задача 4. В электрической цепи, представленной на рисунке, сопротивления резисторов $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$, ёмкость конденсатора $C = 10 \text{ мкФ}$, ЭДС источника $\mathcal{E} = 10 \text{ В}$, его внутреннее сопротивление равно нулю. Определите, какой заряд пройдёт через резистор R_0 после размыкания ключа K .



Решение.

1. Ключ замкнут:



а) напряжение на конденсаторе будет равно напряжению на резисторе R_2 :

$$U_1 = I_1 R_2;$$

б) ток через резистор R_2 :

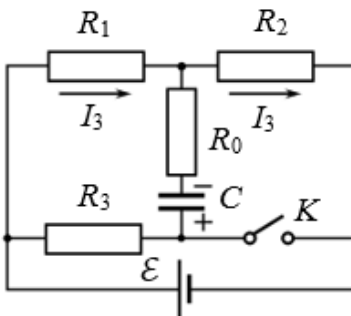
$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}$$

в) заряд конденсатора

$$q_1 = CU_1 = CI_1 R_2 = C \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2}$$

При этом на нижней обкладке конденсатора будет отрицательный заряд.

2. Ключ разомкнут:



а) напряжение на конденсаторе будет равно напряжению на резисторе R_1 :

$$U_2 = I_3 R_1$$

б) ток через резистор R_1 :

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}$$

в) заряд конденсатора

$$q_2 = CU_2 = CI_3R_1 = C \frac{\mathcal{E}R_1}{R_1 + R_2}$$

При этом на нижней обкладке конденсатора будет положительный заряд. Следовательно, после размыкания ключа конденсатор перезарядится (знаки зарядов на его обкладках изменятся на противоположные), и через резистор R_0 протечёт заряд

$$q = q_1 + q_2 = C \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1 + R_2} + C \frac{\mathcal{E}R_1}{R_1 + R_2} = C \frac{\mathcal{E}(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2} = C\mathcal{E} = 10^{-4} \text{ К.}$$

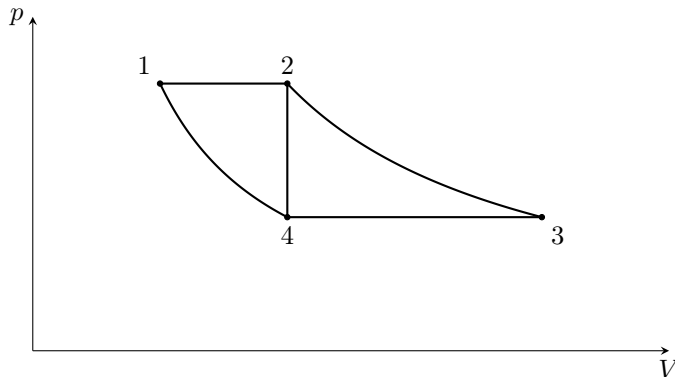
Ответ: $q = C\mathcal{E} = 10^{-4} \text{ Кл.}$

Ответ: 10^{-4} Кл.

Критерии оценивания

1. Правильно определены силы токов, протекающих через резисторы при замкнутом ключе. (+2 балла)
2. Правильно определено напряжение на конденсаторе при замкнутом ключе. (+1 балл)
3. Правильно определен заряд конденсатора и его полярность при замкнутом ключе. (+1 балл)
4. Правильно определены силы токов, протекающих через резисторы при разомкнутом ключе. (+2 балла)
5. Правильно определено напряжение на конденсаторе при разомкнутом ключе. (+1 балл)
6. Правильно определен заряд конденсатора и его полярность при разомкнутом ключе. (+1 балл)
7. Правильно определен искомый заряд, протекший через резистор. (+2 балла)

Задача 5. На pV -диаграмме представлены два прямых циклических процесса $1-2-4-1$ и $2-3-4-2$, совершаемых одинаковым количеством одноатомного идеального газа. Процессы $1-2$ и $3-4$ изобарные, $2-3$ и $4-1$ изотермические, процесс $2-4$ изохорный. Коэффициент полезного действия первого цикла $\eta_1 = 18\%$, второго – $\eta_2 = 20,6\%$. Определите отношение работы газа в процессе $2-3$ к работе, совершаемой над газом в процессе $4-1$.



Возможное решение

В циклическом процессе $1-2-4-1$ газ получает теплоту при изобарическом расширении $1-2$, отдаёт при изохорическом охлаждении $2-4$ и изотермическом сжатии $4-1$.

В цикле $2-3-4-2$ газ получает теплоту при изотермическом расширении $2-3$ и изохорическом нагревании $4-2$, отдаёт при изобарическом сжатии $3-4$.

КПД соответствующих циклов:

$$\eta_1 = 1 - \frac{|Q_{2-4} + Q_{4-1}|}{Q_{1-2}} = 1 - \frac{Q_{4-2} + Q_{1-4}}{Q_{1-2}}$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{|Q_{3-4}|}{Q_{2-3} + Q_{4-2}} = 1 - \frac{Q_{4-3}}{Q_{2-3} + Q_{4-2}}$$

Учитывая, что в изотермических процессах внутренняя энергия газа не изменяется, из выражений для КПД получим:

$$|A_{4-1}| = A_{1-4} = Q_{1-4} = (1 - \eta_1) Q_{1-2} - Q_{4-2}; \quad A_{2-3} = Q_{2-3} = \frac{Q_{4-3}}{1 - \eta_2} - Q_{4-2}$$

Так как $T_1 = T_4$ и $T_2 = T_3$, то

$$Q_{1-2} = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1); \quad Q_{4-3} = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1); \quad Q_{4-2} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1).$$

Следовательно,

$$\frac{A_{2-3}}{|A_{4-1}|} = \frac{\frac{\frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1)}{1 - \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1)}}{(1 - \eta_1) \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1) - \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1)} = \frac{\frac{5}{1 - \eta_2} - 3}{5(1 - \eta_1) - 3}$$

$$\frac{A_{2-3}}{|A_{4-1}|} = \frac{5 - 3(1 - \eta_2)}{(5(1 - \eta_1) - 3)(1 - \eta_2)} \approx 3.$$

Ответ: 3.

Критерии оценивания

1. Правильно определены участки подведения и отведения теплоты в рассматриваемых циклах. (+2 балла, по 1 баллу за каждый правильно описанный цикл)
2. Правильно записаны выражения для КПД циклов. (+2 балла, по 1 баллу за каждое выражение)
3. Правильно записаны выражения для искомых работ с использованием первого начала термодинамики для изотермического процесса. (+1 балл)
4. Правильно выражены искомые работы через КПД и теплоты. (+2 балла)
5. Правильно рассчитаны теплоты через температуры газа на изотермах. (+2 балла)
6. Правильно получено искомое отношение работ. (+1 балл)