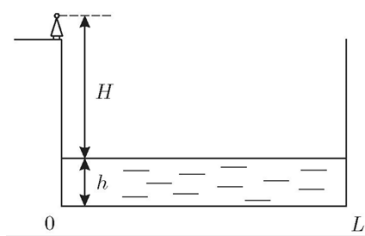


Заключительный этап.

11 класс

Задача 1.

Человек, стоя на краю высокого обрыва, смотрит на ровное плоское дно котлована шириной $L = 200$ м, заполненного водой глубиной $h = 1$ м (см. рисунок). Высота обрыва $H = 10$ м. Размеры котлована удовлетворяют неравенствам $L \gg H \gg h$. Показатель преломления воды равен $n = 1,3$. Как зависит от расстояния x до обрыва видимая глубина h_1 котлована?



Решение.

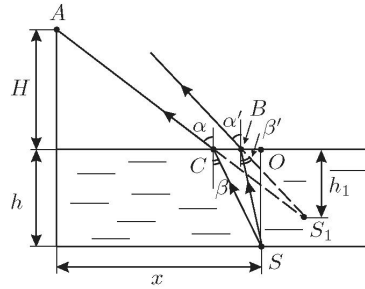


Рис. 1

Человек, находящийся в точке А (рис. 1) оценивает глубину водоёма по двум близким лучам, идущим из точек В и С. Ему кажется, что лучи исходят не из точки S, а из точки S_1 , и поэтому видимая глубина водоёма h_1 . Изменения направлений лучей на поверхности воды подчиняются закону Снеллиуса:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = n$$

где n — показатель преломления воды, а углы α , β , α' , β' показаны на рисунке 1. Пусть δ — длина отрезка BC. Тогда из прямоугольных треугольников, показанных на рисунке 1, следует:

$$\delta = h(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta') = h_1(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha')$$

Поскольку углы α и α' , β и β' мало отличаются, то если $\alpha - \alpha' = \Delta\alpha$, $\beta - \beta' = \Delta\beta$.

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta' \approx \frac{\Delta\beta}{\cos^2 \beta}, \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha' \approx \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Подставляя полученные соотношения в δ , находим

$$h_1 = h \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}$$

Записывая закон Снеллиуса для маленьких приращений углов:

$$\cos \alpha \Delta\alpha = n \cos \beta \Delta\beta, \quad \text{откуда} \quad h_1 = \frac{h}{n} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\cos^3 \beta} = \frac{h}{n} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}\right)^{3/2}}.$$

Для угла α из рисунка 1 находим

$$\sin \alpha = \frac{x - OB}{\sqrt{(x - OB)^2 + H^2}} \approx \frac{x}{\sqrt{x^2 + H^2}}$$

так как $OB \ll x$ при малых h .

Осталось подставить полученное выражение для $\sin \alpha$ в выражение для h_1 и произвести алгебраические преобразования:

$$h_1 = \frac{n^2 h H^3}{((n^2 - 1)x^2 + n^2 H^2)^{3/2}}$$

График этой зависимости представлен на рисунке 2. Видно, что вдали от обрыва водоём кажется более мелким.

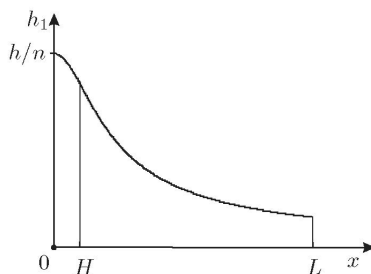


Рис. 2

Ответ: $h_1 = \frac{n^2 h H^3}{((n^2 - 1)x^2 + n^2 H^2)^{3/2}}$

Критерии оценивания

1. Правильно записан закон Снеллиуса для двух лучей, испущенных точкой на дне. (+1 балл)
2. Правильно выполнено построение, позволяющее определить положение изображения точки на дне. (+2 балла)
3. Правильно получена связь между глубиной водоёма, кажущейся глубиной и углами наблюдения. (+3 балла)
4. Правильно получены геометрические соотношения (или им аналогичные) для определения связи между глубиной водоема и горизонтальной координатой точки на дне. (+2 балла)
5. Правильно получена искомая зависимость (+2 балла)

Задача 2. Брусок массой $m = 400$ г, прикрепленный к стенке пружиной жесткостью $k = 500$ Н/м, лежит на горизонтальной шероховатой поверхности. Пружину растянули на $\Delta l_0 = 3$ мм, после чего брусок отпустили без начальной скорости. Коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0,02$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Определите:

- 1) Какую работу $A_{\text{тр}}$ совершит сила трения до первой остановки бруска?
- 2) Сколько раз n пружина окажется в нерастянутом состоянии до полной остановки бруска?
- 3) Чему будет равно удлинение пружины $\Delta l_{\text{ост}}$ в момент полной остановки бруска?

Возможное решение

Согласно закону сохранения энергии, в первой точке остановки бруска выполняется соотношение

$$\frac{k(\Delta l_1)^2}{2} - \frac{k(\Delta l_0)^2}{2} = A_{\text{тр}}$$

где Δl_1 – удлинение пружины в момент первой остановки бруска; $A_{\text{др}}$ – искомая работа силы трения. С учётом того, что работа силы трения равна

$$A_{\text{тр}} = -\mu mg \cdot (\Delta l_0 + \Delta l_1)$$

получаем квадратное уравнение относительно Δl_1 , одно из решений которого равно $(-\Delta l_0)$.

Второе решение даётся формулой

$$\Delta l_1 = \Delta l_0 - 2\mu mg/k$$

откуда

$$A_{\text{тр}} = -2\mu mg \cdot \left(\Delta l_0 - \frac{\mu mg}{k} \right) = 0,45 \text{ мДж.}$$

Удлинение пружины Δl_n после n -го прохождения точки, в которой пружина не растянута, задаётся формулой

$$\Delta l_n = \Delta l_0 - n \cdot 2\mu mg/k$$

при условии того, что в $(n-1)$ -й точке остановки энергия пружины достаточна для того, чтобы брусок прошёл точку, где пружина нерастянута:

$$\frac{k(\Delta l_{n-1})^2}{2} \geq \mu mg \Delta l_{n-1}$$

Отсюда ответ на второй вопрос:

$$n = \left[\frac{k\Delta l_0}{2\mu mg} \right] = 9.$$

Удлинение пружины $\Delta l_{\text{ост}}$ в момент полной остановки бруска определяется следующим образом:

- если в точке с удлинением Δl_n сила упругости $k \cdot \Delta l_n$ меньше максимальной силы трения покоя μmg , то $\Delta l_{\text{ост}} = \Delta l_n$.
- в противном случае $\Delta l_{\text{ост}}$ является решением уравнения

$$\frac{k(\Delta l_{\text{ост}})^2}{2} - \frac{k(\Delta l_n)^2}{2} = -\mu mg \cdot (\Delta l_n - \Delta l_{\text{ост}})$$

которое даётся формулой

$$\Delta l_{\text{ост}} = (n+1) \frac{2\mu mg}{k} - \Delta l_0$$

Ответ:

$$1) A_{\text{тр}} = -2\mu mg \cdot \left(\Delta l_0 - \frac{\mu mg}{k} \right) = 0,45 \text{ мДж.}$$

$$2) n = \left[\frac{k\Delta l_0}{2\mu mg} \right] = 9.$$

$$3) \Delta l_{\text{ост}} = 0,12 \text{ мм.}$$

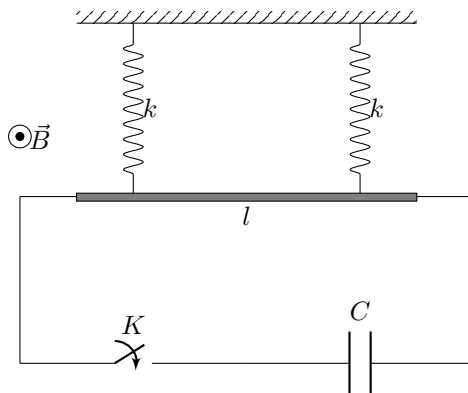
Критерии оценивания

1. Правильно записан закон сохранения энергии к моменту первой остановки. (+1 балл)
2. Правильно рассчитана работа силы трения к моменту первой остановки. (+1 балл)

3. Правильно получено выражение для удлинения пружины в момент первой остановки. (+2 балла)
4. Правильно получено выражение для удлинения пружины после n -ой остановки. (+2 балла)
5. Правильно получено количество n проходов состояния нерастянутой пружины до полной остановки (+2 балла)
6. Правильно получено выражение для остаточной деформации пружины. (+2 балла)

Задача 3. Прямолинейный проводник длины l и массы m подвешен на двух пружинах жесткости k в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией B (рис.). При замыкании ключа K конденсатор емкости C , заряженный до разности потенциалов U , замыкается на проводник и разряжается. При этом возникают колебания проводника. Считайте, что время разрядки конденсатора много меньше периода колебаний проводника.

1. Каков период T возникших колебаний?
2. Какова максимальная разность потенциалов $\Delta\varphi_{max}$ между концами проводника в процессе его дальнейшего движения?
3. Каково максимальное отклонение Δy_{max} проводника от своего первоначального положения?



Возможное решение

При протекании тока I по проводнику длины l , находящемуся в магнитном поле с индукцией B , на проводник действует сила $F = IBl$, направленная в нашем случае вверх или вниз.

За малый промежуток времени Δt , в течение которого ток можно считать приблизительно постоянным, на проводник действует импульс силы $F\Delta t = IBl\Delta t = Bl\Delta q$, где $\Delta q = I\Delta t$ – заряд, протекший по проводнику за тот же малый промежуток времени.

Импульс силы изменяет импульс проводника на величину

$$\Delta p = m\Delta v = F\Delta t = Bl\Delta q$$

За все время протекания тока, т. е. за время разрядки конденсатора, проводник приобретает импульс

$$p = mv = \sum m\Delta v = \sum Bl\Delta q = Blq$$

здесь $q = CU$ – общий заряд, прошедший через поперечное сечение проводника (заряд конденсатора). По условию задачи импульс p проводник получает за такое короткое время, что его смещением за это время можно пренебречь. Силы натяжения пружин также остаются неизменными и уравновешивают силу тяжести проводника. Следовательно, за время начального толчка работой всех сил, кроме электрической силы F , можно пренебречь. Все последующее движение определяется состоянием системы в конце толчка. Такой режим движения обычно называют баллистическим (известны, например, баллистический маятник, баллистический гальванометр и т. п.).

Проводник на пружинах представляет собой пружинный маятник с периодом колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$. Считая его исходное положение за положение равновесия с нулевой потенциальной энергией, запишем закон сохранения энергии для начального состояния и состояния наибольшего отклонения при колебаниях с амплитудой A :

$$\frac{mv^2}{2} = 2\frac{kA^2}{2}$$

Это уравнение совместно с уравнением $mv = BlCI$ определяет амплитуду колебаний:

$$A = \frac{BlCU}{\sqrt{2km}}$$

Максимальное отклонение от положения равновесия:

$$\Delta y_{max} = 2A = \frac{BlCU}{\sqrt{2km}}.$$

В процессе движения проводника в магнитном поле на его концах возникает разность потенциалов $\Delta\varphi = vBl$. Максимальной эта разность потенциалов будет в моменты, когда скорость достигает максимального значения $v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{BlCU}{\sqrt{2km}} = \frac{BlCU}{m}$.

Таким образом:

$$\Delta\varphi_{max} = \frac{B^2 l^2 C U}{m}.$$

Ответ:

$$1) T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

$$2) \Delta\varphi_{max} = \frac{B^2 l^2 C U}{m}.$$

$$3) \Delta y_{max} = \frac{B l C U}{\sqrt{2km}}.$$

Критерии оценивания

1. Правильно определен период колебаний вертикального пружинного маятника. (+1 балл)
2. Правильно рассчитан импульс силы Ампера к моменту окончания разрядки конденсатора. (+3 балла)
3. Правильно записан закон сохранения энергии, определена амплитуда колебаний (Правильно получена амплитуда колебаний альтернативным способом). (+1 балла)
4. Правильно получено выражение для для максимального отклонения от положения равновесия. (+1 балла)
5. Правильно определена максимальная скорость движения проводника. (+2 балла)
6. Правильно получено выражение для максимальной разности потенциалов на концах проводника. (+2 балла)

Задача 4. Среди звезд переменной светимости выделяют так называемые цефеиды, радиус которых пульсирует с периодами от 1 до 50 дней. Максимальной светимости цефеиды соответствуют минимальный радиус и высокая температура внешнего слоя. В таких условиях прозрачность этого слоя понижается в связи с ионизацией гелия. Как результат, внешний слой звезды нагревается до максимальной температуры, после чего расширяется и охлаждается. Затем, прозрачность охлажденного слоя увеличивается, он сжимается, и процесс повторяется снова.

Предположим, что пульсацию внешнего цефеиды можно описать замкнутым термодинамическим циклом, состоящим из двух адиабатических и двух изохорных участков, со следующими модельными параметрами:

- Внутренний радиус пульсирующего слоя постоянен и равен 25068240 км (36 радиусов Солнца).
- Среднее значение внешнего радиуса составляет 27853600 км (40 радиусов Солнца). Этот радиус соответствует среднему значению объёма пульсирующего слоя, равному полусумме наибольшего и наименьшего объёмов.
- Температура пульсирующего слоя в ходе цикла изменяется от 5000 К до 7500 К.
- Вещество звезды можно считать идеальным одноатомным газом с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$.

Какова максимальная амплитуда пульсаций внешнего радиуса звезды в рамках предложенной модели?

Решение

Термодинамический цикл, состоящий из двух адиабатических и двух изохорных участков, показан на Рисунке. Самая высокая температура достигается в точке 1, участок 1 – 2 соответствует адиабатическому расширению. На участке 2 – 3 радиус цефеиды максимален, охлаждение внешнего слоя продолжается при постоянном объёме. Участок 3 – 4 соответствует адиабатическому сжатию охлажденного газа под воздействием гравитации звезды. Сжимаясь на участке 3 – 4, газ нагревается. На участке 4 – 1 объём внешнего слоя цефеиды минимален, этот слой продолжает нагреваться из-за понижения прозрачности при ионизации гелия.

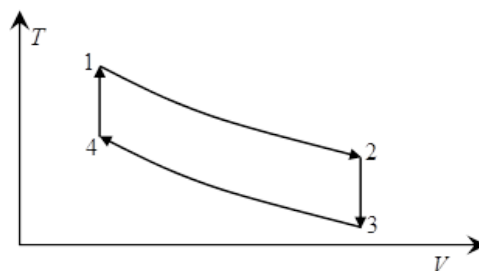


Рис. 3: Модельный цикл пульсации цефеиды

В адиабатическом процессе 1-2 зависимость температуры идеального газа от объёма даётся соотношением

$$T = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V} \right)^{\gamma-1}$$

где γ - показатель адиабаты. Таким образом, в точке 2

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

Аналогично, в адиабатическом процессе 3-4

$$T = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V} \right)^{\gamma-1}$$

причём $V_3 = V_2$. Получается, что в точке 4

$$T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

Модель, предложенная в задаче, имеет физический смысл тогда, когда

$$T_4 \leq T_1, T_2 \geq T_3$$

Максимальной амплитуде пульсаций внешнего радиуса, возможной в рамках модели, соответствует максимальное отношение объёмов V_2/V_1 . Это отношение, равное $(T_4/T_3)^{1/(\gamma-1)}$, достигает наибольшего значения при

$$T_4 = T_1, T_2 = T_3$$

При точном выполнении равенств для температур адиабаты 1-2 и 3-4 совпадут, тогда как участки 2-3 и 4-1 исчезнут.

Подстановка числовых значений даёт

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{7500}{5000}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 1,837$$

Согласно условию задачи, среднее значение объёма можно найти через среднее значение внешнего радиуса:

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{V_1 + V_2}{2} = \\ &= \frac{4\pi}{3} (\langle R \rangle^3 - R_{\text{внутр}}^3) = \frac{4\pi}{3} (27853600^3 - 25068240^3) = 2,453 \cdot 10^{22} \text{ км}^3. \end{aligned}$$

Теперь,

$$\begin{aligned} V_2 &= 2\langle V \rangle - V_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{2\langle V \rangle}{V_1} - 1 \Rightarrow \\ V_1 &= \frac{2\langle V \rangle}{V_2/V_1 + 1} = \frac{2 \cdot 2,453 \cdot 10^{22} \text{ км}^3}{1,837 + 1} = 1,729 \cdot 10^{22} \text{ км}^3. \\ V_2 &= 2\langle V \rangle - V_1 = 2 \cdot 2,453 \cdot 10^{22} \text{ км}^3 - 1,729 \cdot 10^{22} \text{ км}^3 = 3,177 \cdot 10^{22} \text{ км}^3. \end{aligned}$$

Из объёмов находим соответствующие радиусы внешнего слоя:

$$R_{1,2} = \left(\frac{3V_{1,2}}{4\pi} + R_{\text{внутр}}^3\right)^{1/3} \Rightarrow R_1 = 2,709 \cdot 10^7 \text{ км}, R_2 = 2,858 \cdot 10^7 \text{ км}.$$

Амплитуда пульсаций внешнего радиуса звезды равна разности полученных радиусов:

$$\Delta R = R_2 - R_1 = 2,858 \cdot 10^7 - 2,709 \cdot 10^7 = 1,487 \cdot 10^6 \text{ км}$$

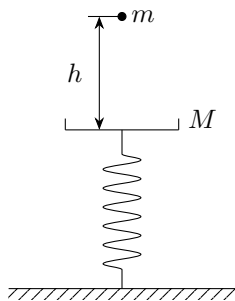
В радиусах Солнца, $\Delta R = 2,135$ радиуса Солнца.

Ответ: Максимальная амплитуда пульсаций внешнего радиуса звезды в рамках предложенной модели равна $1,487 \cdot 10^6 \text{ км}$.

Критерии оценивания

1. Правильно записаны соотношения для температур и объемов в термодинамическом цикле цефеиды. (+2 балла)
2. Правильно получено условие максимальности амплитуды пульсаций внешнего радиуса звезды. (+3 балла)
3. Правильно получены выражения для радиусов внешнего слоя звезды. (+4 балла)
4. Правильно получена амплитуда пульсаций внешнего радиуса звезды. (+1 балл)

Задача 5. На чашу пружинных весов, совершающую гармонические колебания в вертикальном направлении, с высоты $h = 45$ см без начальной скорости упала бусинка и после абсолютно упругого удара о чашу снова поднялась на ту же высоту h (см. рисунок). Затем, через каждую половину периода колебаний чаши, имевших место до первого удара, ситуация стала повторяться. Удары бусинки о чашу происходят в тот момент, когда чаша достигает положения равновесия. Масса чаши в $n = 20$ раз больше массы бусинки. Определите амплитуду колебаний чаши.



Возможное решение

Поскольку бусинка после удара о чашу весов поднялась на ту же высоту h , то её скорость в результате соударения изменила направление на противоположное и осталась такой же по величине, какой была в момент удара. Так как удар абсолютно упругий, то скорость чаши также не изменилась по величине. Очевидно, что непосредственно перед соударением чаша двигалась навстречу бусинке.

Так как соударение происходит в момент прохождения чаши положения равновесия, то чаша вернётся в это положение через половину периода колебаний, а бусинка - через время, равное удвоенному времени Δt падения с высоты h . Следовательно,

$$\frac{1}{2}T = 2\Delta t$$

Поскольку время падения бусинки

$$\Delta t = \sqrt{2h/g},$$

то период колебаний чаши

$$T = 4\sqrt{2h/g}.$$

В момент соударения чаша проходит положение равновесия с максимальной скоростью

$$v_{\max} = A\omega,$$

где A - амплитуда колебаний; $\omega = 2\pi/T$ - циклическая частота.

С учётом того, что удар происходит в момент, когда чаша находится в положении равновесия (скорость чаши максимальна), и после соударения скорости бусинки и чаши по величине остались такими же, а изменились только их направления ($\vec{v}' = -\vec{v}$; $\vec{v}'_{\max} = -\vec{v}_{\max}$), то на основании закона сохранения импульса

$$mv - Mv_{\max} = -mv' + Mv'_{\max},$$

получим:

$$v_{\max} = \frac{m}{M}v,$$

где скорость бусинки в момент соударения

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{m}{M} \frac{vT}{2\pi} = \frac{m}{M} \frac{4\sqrt{2gh}\sqrt{2h/g}}{2\pi} = \frac{4h}{n\pi} \approx 3 \text{ см.}$$

$$\text{Ответ: } A = \frac{4h}{n\pi} \approx 3 \text{ см.}$$

1. Правильно записано соотношение между периодом колебаний чаши и временем падения шарика. (+2 балла)
2. Правильно получен период колебаний чаши. (+1 балл)
3. Указано, что в момент удара скорости шарика и чаши меняются только по направлению (+2 балла)
4. Правильно записан закон сохранения импульса в момент удара, получена связь между скоростями в момент удара. (+2 балла)
5. Правильно получена амплитуда колебаний чаши. (+3 балл)