

Заключительный этап.

9 класс

Задача 1. Особая планета

На некоторой планете при плоских колебаниях маленького массивного шарика на нити длиной $L = 3$ м максимальная сила натяжения нити отличается от минимальной в $k = 4$ раза, если максимальный угол отклонения равен α . Такой же угол α с вертикалью образует нить с шариком на конце, если он вращается в горизонтальной плоскости с периодом $T = 4,0$ с вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса.

- 1) Определите описанный в условии угол α .
- 2) Определите ускорение свободного падения g на такой планете.

Возможное решение

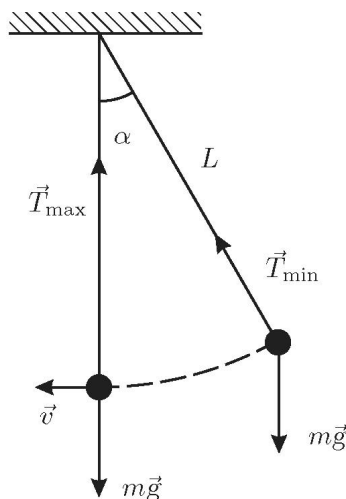


Рис. 1

На рисунке 1 показаны два положения шарика на нити, совершающего плоские колебания. Применим второй закон Ньютона для произвольного угла отклонения от вертикали φ в проекциях на направление нити:

$$\frac{mv^2(\varphi)}{L} = T(\varphi) - mg \cos \varphi \quad \text{или} \quad T(\varphi) = \frac{mv^2(\varphi)}{L} + mg \cos \varphi,$$

где $v(\varphi)$ – скорость маятника, $T(\varphi)$ – сила натяжения нити при произвольном угле отклонения φ . Поскольку скорость v и $\cos \varphi$ возрастают при переходе от максимального отклонения $\varphi = \alpha$ к положению равновесия $\varphi = 0$, то

$$T_{\max} = mg + \frac{mv^2}{L}, \quad T_{\min} = mg \cos \alpha.$$

Скорость v в положении равновесия найдём, воспользовавшись законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgL(1 - \cos \alpha)$$

Откуда получим

$$\cos \alpha = \frac{3}{k+2} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Рассмотрим теперь вращательное движение шарика на нити (конический маятник), изображённого на рисунке 2. Ускорение груза a направлено к оси вращения OO' . T – сила натяжения нити. По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$

Из рисунка 2 видно, что

$$ma = mg \operatorname{tg} \alpha$$

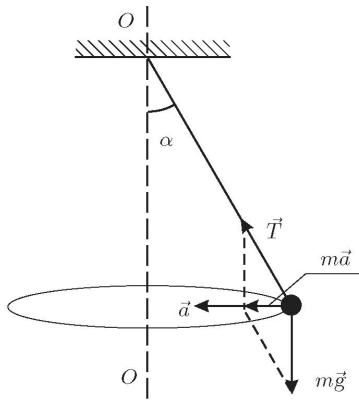


Рис. 2

Центростремительное ускорение

$$a = \omega^2 L \sin \alpha$$

Отсюда получаем:

$$g = \omega^2 L \cos \alpha = \frac{3}{k+2} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 L = 3,7 \text{ м/с}^2$$

Ответ: 1) $\alpha = 60^\circ$; 2) $g = 3,7 \text{ м/с}^2$.

Критерии оценивания

1. Правильно записан 2-ой закон Ньютона для случая плоских колебаний в проекции на ось, направленную к точке подвеса. (+1 балл)
2. Получены верные выражения для минимальной и максимальной силы натяжения нити. (+2 балла)
3. Из закона сохранения энергии получено правильное выражение для скорости шарика в нижней точке траектории. (+1 балл)
4. Получено верное выражение для $\cos \alpha$. (+2 балла)
5. Получено значение угла $\alpha = 60^\circ$. (+1 балл)
6. Правильно записан 2-ой закон Ньютона для случая вращения шарика в горизонтальной плоскости в проекции на горизонтальное направление. (+1 балл)
7. Правильно определена величина центростремительного ускорения (+1 балл)
8. Получено верное выражение и численные значения для ускорения свободного падения на особой планете. (+1 балл)

Задача 2. Осторожно, весна! На краю крыши висят сосульки конической формы, геометрически подобные друг другу, но разной длины. После резкого потепления от $T_1 = 0^\circ\text{C}$ до $T_2 = 10^\circ\text{C}$ самая маленькая сосулька длиной $l = 10$ см растаяла за время $t = 2$ часа. За какое время растает большая сосулька длиной $L = 30$ см, если внешние условия не изменятся?

Возможное решение

Количество тепла ΔQ , поступающее к сосульке из внешней среды за небольшой промежуток времени Δt , пропорционально площади её боковой поверхности S и этому промежутку Δt . Это тепло идёт на плавление льда, при неизменной его температуре 0°C , то есть $\Delta Q = \Delta m \lambda$, где λ – удельная теплота плавления льда. Масса Δm растаявшего за время Δt льда равна $\rho S \Delta h$, где ρ – плотность льда, а толщина растаявшего слоя Δh пропорциональна, изменению длины сосульки Δl , поскольку сосулька тает с поверхности, сохраняя свою форму. Получаем, что

$$\Delta Q = \Delta m \lambda = \rho S \Delta h \lambda \sim \rho S \Delta l \lambda \sim S \Delta t$$

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} \sim \frac{1}{\rho \lambda} = \text{const.}$$

Таким образом, длина сосульки убывает с постоянной скоростью. Поэтому сосулька длиной L растает за время

$$t' = \frac{L}{l} t = 6 \text{ часов.}$$

Ответ: 6 часов.

Критерии оценивания

1. Правильно получена связь между количеством получаемой извне теплоты и площадью поверхности сосульки. (+1 балл)
2. Правильно получена связь между количеством получаемой извне теплоты и временем. (+1 балл)
3. Указано, что количество полученной извне теплоты прямо пропорционально массе растаявшей части сосульки. (+1 балл)
4. Правильно получена связь между массой растаявшей части сосульки и изменением длины сосульки. (+2 балла)
5. Получена связь между изменением длины сосульки и промежутком времени. (+1 балл)
6. Сделан вывод о постоянстве скорости изменения длины сосульки. (+2 балла)
7. Правильно определено время таяния большой сосульки (+2 балла)

Задача 3. С высоты H падал с нулевой начальной скоростью шар массой M . Когда он пролетал мимо окна, находящегося на высоте $H_1 = H/2$, в него в горизонтальном направлении выстрелили из ружья. Пуля массой $m = M/10$ со скоростью $v_0 = 200$ м/с попадает в шар и застревает. С какой скоростью шар двигался сразу после застревания в нем пули? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Возможное решение

Обозначим скорость шара после попадания пули $u = \{u_x, u_y\}$, скорость шара перед попаданием пули – $v_{\text{ш}}$. Пусть $n = m/M = 1/10$.

В соответствии с законом сохранения импульса (в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления)

$$Ox : (m + M)u_x = mv_0 \Rightarrow u_x = \frac{mv_0}{m + M} = \frac{v_0}{1 + M/m} = \frac{v_0}{1 + 1/n} = \frac{v_0 n}{1 + n};$$

$$Oy : (m + M)u_y = Mv_{\text{ш}} \Rightarrow u_y = \frac{Mv_{\text{ш}}}{m + M} = \frac{v_{\text{ш}}}{m/M + 1} = \frac{v_{\text{ш}}}{n + 1}.$$

Из закона сохранения энергии определим скорость шара к моменту выстрела:

$$mv_{\text{ш}}^2/2 = mg(H - H_1) \Rightarrow v_{\text{ш}} = \sqrt{2g(H - H_1)}.$$

Отсюда вертикальная компонента скорости шара после застревания в нем пули

$$u_y = \frac{\sqrt{2g(H - H_1)}}{n + 1}.$$

Скорость шара после застревания пули определим по теореме Пифагора

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{\sqrt{2g(H - H_1) + (v_0 n)^2}}{n + 1} = \frac{\sqrt{gH + (v_0 n)^2}}{n + 1}.$$

Расчет численного значения:

$$u = \frac{\sqrt{gH + (v_0 n)^2}}{n + 1} = \frac{\sqrt{100 + (200 \cdot 0,1)^2}}{1,1} = \frac{\sqrt{500}}{1,1} \approx 20 \text{ м/с}.$$

Ответ: 20 м/с.

Критерии оценивания

1. Из закона сохранения энергии определена скорость шара к моменту выстрела. (+1 балл)
2. Правильно записан закон сохранения импульса в проекциях на два взаимно перпендикулярных направления. (+3 балла, по 1,5 балла за каждое правильное соотношение)
3. Правильно получены выражения для компонент итоговой скорости шара. (+3 балл, по 1,5 балла за каждое выражение для компонент скорости)
4. Получено правильное выражение для скорости шара после застревания в нем пули. (+2 балла)
5. Получено верное численное значение скорости шара после застревания в нем пули. (+1 балл)

Задача 4. Будем считать, что Луна вращается вокруг Земли в той же самой плоскости, что и Земля вокруг Солнца (плоскость эклиптики). Оба вращения происходят против часовой стрелки. Луна всегда обращена к Земле одной стороной. Вблизи полюса Луны установлен телескоп, который всё время направлен на Солнце. С каким периодом этот телескоп вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости эклиптики? Ответ дать в сутках. Принять, что периоды обращения Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли составляют 365,26 и 27,3 суток, соответственно. Полагать, что расстояние от Земли до Луны пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием от Земли до Солнца.

Возможное решение

Радиус орбиты Луны составляет 0,0026 астрономических единицы. Можно принять, что Земля и Луна расположены в одной и той же точке относительно Солнца, как и предложено в задаче.

При движении вокруг Земли Луна всегда направлена к Земле одной стороной. Это значит, что она вращается вокруг своей оси с периодом, равным периоду вращения вокруг Земли. Для компенсации этого вращения луч зрения телескопа должен поворачиваться в противоположную сторону с тем же периодом. Если бы Земля покоилась относительно Солнца, то угловые скорости вращения телескопа и Луны ω и ω_L были бы равными по модулю и противоположными по направлению.

Движение Земли вокруг Солнца приводит к тому, что вектор, соединяющий центры Земли и Солнца, вращается против часовой стрелки с угловой скоростью, равной скорости вращения Земли ω_3 . Луч зрения телескопа должен быть всегда направлен вдоль этого вектора. Таким образом, за время совершения Луной полного оборота вокруг Земли, телескоп должен повернуться на полный оборот за вычетом угла поворота вектора Земля-Солнце в течение того же времени. Это значит, что угловые скорости вращения телескопа, Луны и Земли связаны соотношением

$$\omega = -(\omega_L - \omega_3) \quad (1)$$

Периоды вращения связаны с угловыми частотами отношениями $T = 2\pi/\omega$. Знак «-» перед скобками в формуле (1) означает, что луч зрения телескопа вращается по часовой стрелке. Ниже опустим этот знак, сопоставляя периоды «по модулю». Тогда

$$1/T = (1/T_L - 1/T_3) \Rightarrow T = T_L \cdot T_3 / (T_3 - T_L) = 29.5 \text{ суток.}$$

Значит, период вращения телескопа вокруг оси, перпендикулярной плоскости эклиптики, составит 29,5 суток.

Ответ: 29,5 суток.

Критерии оценивания

1. Правильно описан характер движения Луны вокруг Земли и ее вращения вокруг своей оси. (+3 балла)
2. Сделан корректный вывод о поправке на движение Земли вокруг Солнца. (+3 балла)
3. Получено правильное выражение для угловой скорости вращения телескопа. (+3 балла)
4. Правильно определен период вращения телескопа. (+1 балл)

Задача 5. Открытая сверху коробочка в форме куба плавает на поверхности воды так, что в жидкости находится две трети её объёма. Имеется 20 монет массой $m = 6$ г каждая. По центру коробочки внутрь неё аккуратно кладут монеты. Пренебрегая силой сопротивления, определите наименьшее количество монет, которое следует положить в коробочку, чтобы она утонула. Масса коробочки $M = 140$ г. Монеты можно класть по одной, или по несколько монет одновременно.

Возможное решение

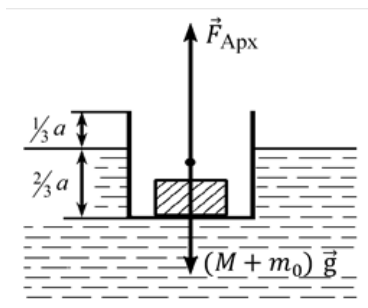


Рис. 3

Условие плавания коробочки:

$$Mg = F_{\text{Арх}}; \quad Mg = \frac{2}{3}\rho ga^3$$

где a – длина стороны коробочки; ρ – плотность воды.

При погружении коробочки в воду сила Архимеда будет изменяться в пределах от

$$F_{\text{Арх min}} = \frac{2}{3}\rho ga^3 = Mg$$

до

$$F_{\text{Арх max}} = \rho ga^3 = \frac{3}{2}Mg$$

где учтено условие плавания. Чтобы коробочка утонула при наименьшей массе груза, монеты нужно класть не по одной, а стопой.

Если нулевой уровень отсчёта потенциальной энергии выбран на уровне центра масс системы, когда верхний край коробочки будет находиться на уровне воды, то начальная и конечная энергия коробочки с монетами будут равны соответственно

$$E_1 = \frac{1}{3}(M + m_0)ga; \quad E_2 = 0$$

где m_0 – масса монет в коробочке. Поскольку силой сопротивления при движении коробочки можно пренебречь, то изменение полной механической энергии

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A_{\text{Арх}}$$

где

$$A_{\text{Арх}} = -(F_{\text{Арх}})_{\text{ср}} \Delta S = -\frac{Mg + \frac{3}{2}Mg}{2} \frac{a}{3} = -\frac{5Mga}{12}$$

– работа силы Архимеда на пути $\Delta S = \frac{1}{3}a$.

Следовательно,

$$-\frac{1}{3}(M + m_0)ga = -\frac{5}{12}Mga; \quad m_0 = \frac{1}{4}M$$

то есть, чтобы коробочка утонула, в неё нужно положить не менее

$$N = \frac{m_0}{m} = \frac{M}{4m} \approx 5,8 = 6 \text{ монет.}$$

Ответ: $N_{\text{min}} = 6$ монет.

Ответ: 6 монет.

Критерии оценивания

1. Правильно записано условие плавания коробочки. (+1 балл)
2. Правильно определены пределы изменения силы Архимеда, действующей на коробочку при погружении. (+2 балла)
3. Сделан корректный вывод о способе помещения монет в коробочку для ее затопления (необходимо погружать монеты стопкой за один раз). (+3 балла)
4. Правильно рассчитано изменение потенциальной энергии коробочки с монетами при погружении. (+1 балл)
5. Правильно рассчитана работа силы Архимеда при погружении. (+1 балл)
6. Правильно определено минимальное необходимое количество монет для затопления коробочки. (+2 балла)