Вариант I

Задача 1. Все члены геометрической прогрессии положительны. Сумма первых 11 членов прогрессии равна 6, а сумма обратных величин этих членов равна 24. Найдите шестой член прогрессии.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть a_1, a_2, $\ldots$, — наша прогрессия, q — её частное; $a_i = a_1 \cdot q^{i-1}$. По условию

$$6 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} = a_1 \cdot \left(1 + q + \ldots + q^{10}\right)$$
$$24 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{a_1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^{10}}\right) = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 + q + \ldots + q^{10}}{q^{10}}.$$

Поделим первое выражение на второе, получим

$$\frac{6}{24} = a_1^2 \cdot q^{10},$$

откуда $a_6^2 = a_1^2 q^{10} = \frac{1}{4}$. Поскольку все члены прогрессии положительны, то $a_6 = \frac{1}{2}$.

Задача 2. На доске написаны числа 1, 2, 3, $\ldots$, 27. За одну операцию Саша может выбрать два числа на доске, стереть их и записать на доску сумму стёртых чисел. Такими операциями он хочет добиться, чтобы на доске не нашлись одно или несколько чисел, сумма которых равна 27 (сумма одного числа — это само это число). Какое наименьшее количество операций придётся сделать Саше?

Ответ: 7.

Решение. Для начала докажем, что меньше чем 9 операциями Саше не обойтись. Разобьём все числа, кроме 27, на пары: 1 и 26, 2 и 25, $\ldots$, 13 и 14. Заметим, что если хотя бы в одной паре останутся оба числа, то на доске останутся числа, сумма которых равна 27. Значит, в каждой паре хотя бы одно из чисел должно было участвовать хотя бы в одной операции. Кроме того, хотя бы в одной операции должно участвовать и само число 27. В каждой операции участвуют два числа, поэтому понабодиться на менее $(13+1)/2 = 7$ операций.

Теперь покажем, как Саша может справиться за 7 операций.

Способ 1. Разобьём все нечётные числа 1, 3, $\ldots$, 27 на пары произвольным образом, и сложим все числа в парах. Теперь на доске написано только чётные числа. Сумма чётных чисел не может быть 27.

Способ 2. Разобьём числа от 1 до 13 и 27 на пары: 1 и 13, 2 и 12, $\ldots$, 6 и 8, а также 7 и 27 — и сложим числа в каждой паре. Теперь на доске написаны только числа от 14 до 26, а также число 34. Ни одно из них не равно 27, а сумма любых хотя бы двух — строго больше 27.

Задача 3. Партию новогодних шаров необходимо сложить в коробки так, чтобы в каждой коробке лежали шарики. Если использовать коробки вместимостью 90 шаров, то ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если взять на 3 коробки больше, но в которые помещается по 80 шаров, то вновь ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если же взять ещё на 12 коробок больше, но вместимостью 50 шаров, то все коробки будут полными. Сколько шаров могло быть в партии?

Ответ: 1700.

Решение. Пусть n — число коробок по 50 шаров. Тогда число шаров равно $50n$. Число коробок по 80 шаров равно $n-12$. Одна коробка оказывается неполной, поэтому $80(n-12) > 50n$. Партия шаров не помещается в $n-13$ коробок, поэтому $80(n-13) < 50n$. Аналогичные рассуждения применительно к коробкам по 90 шаров дают неравенства $90(n-15) > 50n$ и $90(n-16) < 50n$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 80(n-12) > 50n, \\ 80(n-13) < 50n, \\ 90(n-15) > 50n, \\ 90(n-16) < 50n. \end{cases}$$

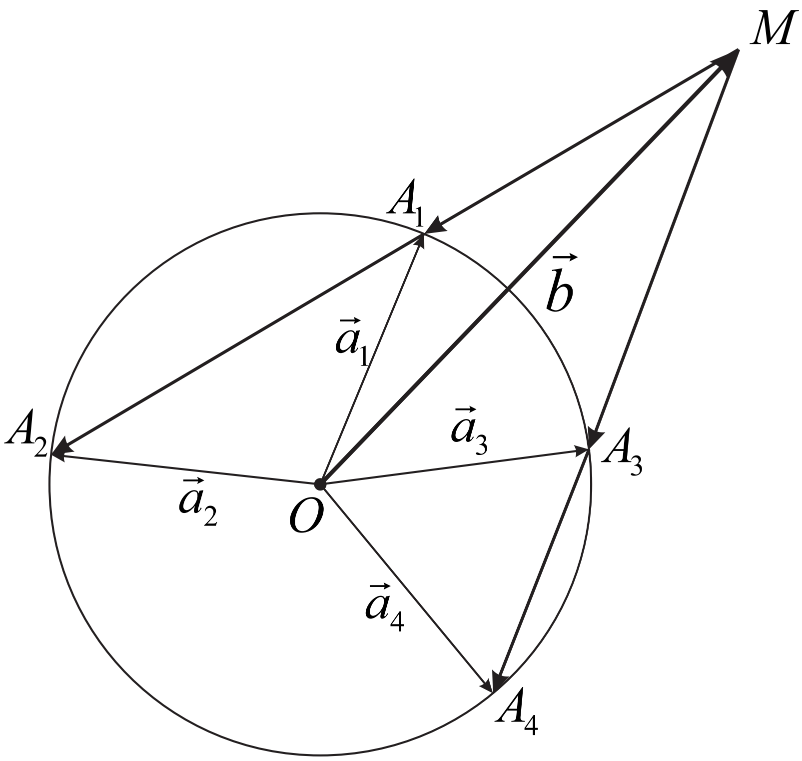
Откуда $3n > 96$, $3n < 104$, $4n > 135$, $4n < 144$. Значит, $33 \leqslant n$, $n \leqslant 34$, $34 \leqslant n$, $n \leqslant 35$. Единственное подходящее n равно 34.

Задача 4. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$, расположенные в одной плоскости с вектором $\vec{b}$, имеют равную длину, отличную от длины вектора $\vec{b}$. Известно, что $\vec{a}_2 + \vec{b} - 2\vec{a}_1 = 8\vec{a}_4 + \vec{b} - 9\vec{a}_3 = \vec{0}$, $|\vec{a}_3 - \vec{b}| = 8$. Найдите $|\vec{a}_1 - \vec{b}|$.

Ответ: 6.

Решение. Из правила треугольника следует, что равенство, указанное в условии, может выполняться, только если $2|\vec{a}_1| \leqslant |\vec{a}_2| + |\vec{b}|$, но поскольку $|\vec{a}_i| \neq |\vec{b}|$, то $|\vec{b}| > |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$. Из второго равенства следует, что $|\vec{b}| > |\vec{a}_3| = |\vec{a}_4|$.

Запишем равенства в виде: $\vec{a}_2 - \vec{b} = 2(\vec{a}_1 - \vec{b})$, $9(\vec{a}_3 - \vec{b}) = 8(\vec{a}_4 - \vec{b})$. Отсюда следует, что векторы $\vec{a}_3 - \vec{b}$ и $\vec{a}_4 - \vec{b}$ одинаково направлены, причем $|\vec{a}_4 - \vec{b}| = \frac{9}{8} \cdot |\vec{a}_3 - \vec{b}| = 9$. Аналогично, одинаково направленными векторами являются $\vec{a}_1 - \vec{b}$ и $\vec{a}_2 - \vec{b}$.



На рисунке выше $\overrightarrow{OM} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{OA_3} = \vec{a}_3$, $\overrightarrow{OA_4} = \vec{a}_4$. По условию $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = |\vec{a}_4|$. Следовательно, точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на окружности с центром в точке O. По теореме о двух секущих запишем $MA_1 \cdot MA_2 = MA_3 \cdot MA_4$, но $MA_3 = |\vec{a}_3 - \vec{b}| = 8$, $MA_4 = |\vec{a}_4 - \vec{b}| = 9$, $MA_2 = |\vec{a}_2 - \vec{b}| = 2 \cdot |\vec{a}_1 - \vec{b}| = 2 \cdot MA_1$. Следовательно, $2 \cdot MA_1^2 = 8 \cdot 9 = 72$, откуда $MA_1 = 6$.

Задача 5. Про действительные числа a, b, c известно, что

$$\begin{cases} ac - 3 = 4b^2, \\ 2bc - 3 = a^2. \end{cases}$$

Найдите все значения, чему может быть равно ab.

Ответ: $(0; +\infty)$.

Решение. Вычтем из первого уравнения второе, получим

$$c(a - 2b) = (2b - a)(2b + a) \text{ и } (a - 2b)(a + 2b + c) = 0.$$

Если $a + 2b + c = 0$, то $a = -2b - c$ и первое уравнение системы приводится к виду $3b^2 + (b + c)^2 = -3$, что невозможно. Значит, $a = 2b$ и система сводится к одному уравнению $2bc = 4b^2 + 3$, которое имеет решение относительно c при всех $b \neq 0$: $c = \frac{4b^2+3}{2b}$. Таким образом, $ab = 2b^2 > 0$, при этом любое положительное значение $d > 0$ произведение ab может принять: достаточно взять $b = \sqrt{\frac{d}{2}}, a = 2b, c = \frac{4b^2+3}{2b}$.

Задача 6. Решите уравнение

$$\cos\frac{88\pi^2}{x} = \frac{1}{\sin 3x}.$$

Ответ: $-\dfrac{11\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{2}$.

Решение. Домножим на знаменатель

$$\cos\frac{88\pi^2}{x}\cdot\sin 3x = 1.$$

Тригонометрические функции ограничены, поэтому

$$\left|\cos\frac{88\pi^2}{x}\right| \leqslant 1, \qquad |\sin 3x| \leqslant 1.$$

Равенство в произведении возможно, если

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\cos\dfrac{88\pi^2}{x} = 1,\\ \sin 3x = 1,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\cos\dfrac{88\pi^2}{x} = -1,\\ \sin 3x = -1.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{88\pi^2}{x} = 2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}\\ 3x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{88\pi^2}{x} = \pi + 2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}\\ 3x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Вторая система не имеет решений, ведь после перемножения равенств, домножения на $\frac{2}{\pi^2}$, получаем $2\cdot 3\cdot 88 = (1+2n)(-1+4m)$, что невозможно для целых n и m. Чтобы существовало решение первой системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$88\pi^2\cdot 3 = 2\pi n\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right),$$

т.е. $2^3\cdot 3\cdot 11 = n(4m+1)$. У числа $2^3\cdot 3\cdot 11$ имеется 4 делителя вида $4m+1$: это 1, $3\cdot 11$, -3, -11, откуда $m=0$, $m=8$, $m=-1$, $m=-3$, откуда и следует ответ.

Задача 7. Наименьшее значение функции

$$\sqrt{x_1^2+1^2} + \sqrt{x_2^2+2^2} + \sqrt{x_3^2+3^2} + \ldots + \sqrt{x_{2023}^2+2023^2}$$

для неотрицательных $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$, сумма которых равна k, равно $2023\cdot 2024$. При каком значении параметра k такое возможно?

Ответ: только $2023\cdot 1012\cdot\sqrt{3}$.

Решение. Заметим, что если на координатной плоскости по оси x последовательно отложить отрезки длины $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$, а по оси y соответственно отрезки равные по длине значениям членов последовательности 1, 2, ..., 2023, то значение функции есть сумма длин гипотенуз с соответствующими катетами (длина ломаной). Тогда наименьшее значение функции — это длина кратчайшей ломаной, т. е. длина отрезка (гипотенуза треугольника с катетами k и $1 + 2 + \ldots + 2023$).

Это арифметическая прогрессия. Просуммируем ее

$$1 + 2 + \ldots + 2023 = \frac{2023 \cdot 2024}{2} = 2023 \cdot 1012.$$

Тогда значение параметра найдем из равенства

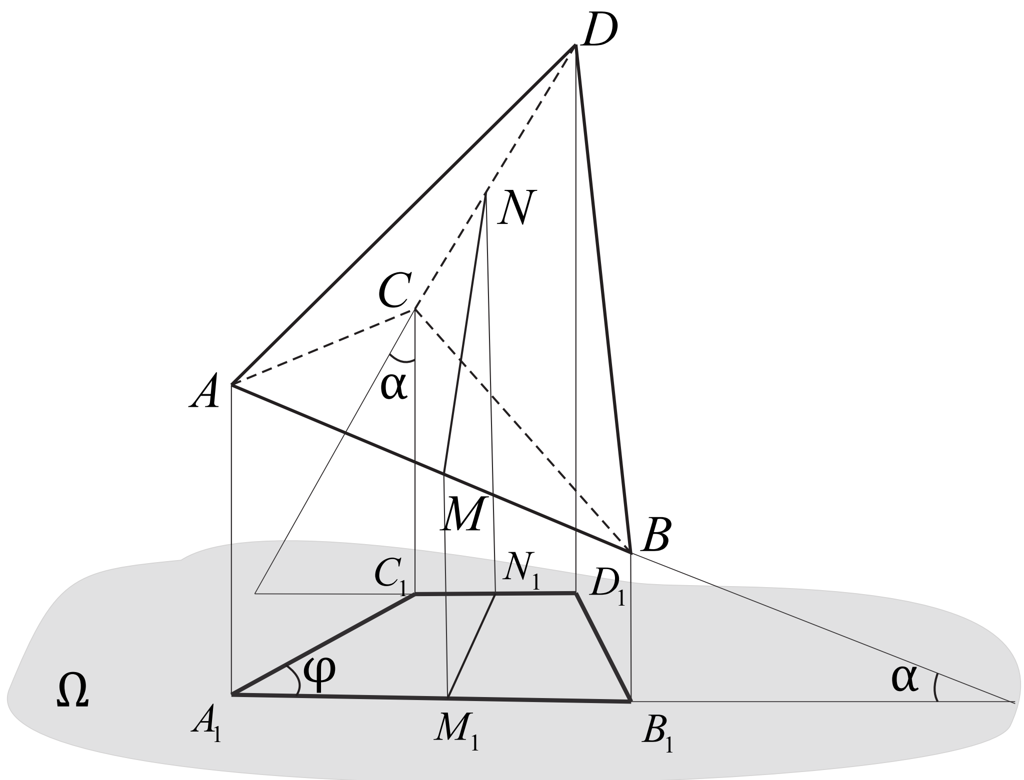
$$\sqrt{k^2 + 2023^2 \cdot 1012^2} = 2023 \cdot 2024.$$

То есть $k = \sqrt{2023^2 \cdot 2024^2 - 2023^2 \cdot 1012^2} = 2023 \cdot 1012 \cdot \sqrt{3}$.

Задача 8. Ортогональной проекцией правильной треугольной пирамиды на некоторую плоскость является равнобокая трапеция с острым углом $60°$. Известно, что объём пирамиды равен 72. Найдите площадь трапеции.

Ответ. $12\sqrt{6}$.

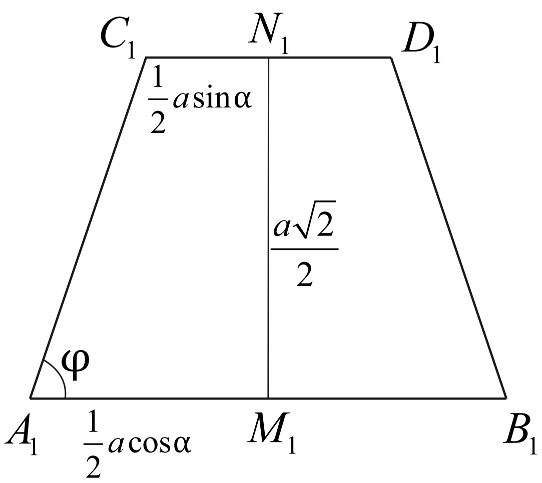
Решение. Пусть сторона основания пирамиды $DABC$ с вершиной D равна a, а боковое ребро равно b. Для построения проекции достаточно рассмотреть пару скрещивающихся рёбер, например AB и CD, проекции которых являются основаниями трапеции (рисунок ниже).



Пусть MN — общий перпендикуляр этой пары рёбер. Очевидно, M — середина AB и $MN \perp AD$. Проекция MN на плоскость Ω — это отрезок M_1N_1, являющийся высотой трапеции $A_1B_1D_1C_1$. На рисунке выше показан именно такой порядок следования вершин трапеции, но при другом угле наклона пирамиды (которая может вращаться вокруг оси MN) положение точек C_1 и D_1 может измениться так, что боковыми сторонами трапеции будут отрезки A_1D_1 и B_1C_1, что не влияет на решение задачи.

При ортогональном проектировании сохраняется отношение длин параллельных отрезков, поэтому M_1 — середина A_1B_1. По условию $A_1B_1D_1C_1$ — равнобедренная трапеция, отсюда делаем вывод, что N_1 — середина C_1D_1, а, значит, и N — середина CD. Но это возможно только в правильном тетраэдре. Следовательно, все рёбра пирамиды равны a. Объём правильного тетраэдра $\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = 72$, откуда $a = 6\sqrt{2}$.

Теперь рассмотрим проекцию пирамиды более детально (рисунок ниже).



Пусть угол наклона прямой AB к плоскости Ω равен α, тогда вследствие перпендикулярности скрещивающихся рёбер правильной пирамиды угол наклона прямой CD к плоскости Ω составляет $90^\circ - \alpha$ (см. первый рисунок). Отсюда $A_1M_1 = \frac{1}{2}a\cos\alpha = 3\sqrt{2}\cos\alpha$, $C_1N_1 = \frac{1}{2}a\sin\alpha = 3\sqrt{2}\sin\alpha$. Но $M_1N_1 = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 6$ (расстояние между скрещивающимися рёбрами правильного тетраэдра). Известно, что $\frac{|A_1M_1 - C_1N_1|}{M_1N_1} = \operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, или $|\cos\alpha - \sin\alpha| = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Площадь трапеции $S_{\text{трап}} = (A_1M_1 + C_1N_1)\cdot M_1N_1 = 18\sqrt{2}\cdot(\cos\alpha + \sin\alpha)$. Из тождества $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = 2$ найдём $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, откуда $S = 12\sqrt{3}$.

Задача 9. Функция f, определённая на действительных числах, принимает действительные значения. Известно, что для любых действительных x и y выполнено равенство $f(x)f(y) = f(7x - y)$. Найдите все такие функции f.

Ответ: $f(x) = 0$ и $f(x) = 1$.

Решение. Подставим $y = 7x - z$, тогда $f(x)f(7x - z) = f(z)$. Если для некоторого x выполнено $f(x) = 0$, тогда получаем, что и для любого z выполнено $f(z) = 0$, т.е. функция постоянная и равна нулю.

Если же функция не принимает значение 0, то подставим $y = 3{,}5x$. Тогда $f(x)f(3{,}5x) = f(3{,}5x)$, после сокращения на $f(3{,}5x) \neq 0$, получаем $f(x) = 1$, т.е. функция постоянная и равна 1.

Задача 10. Последовательность (a_n) удовлетворяет условиям

$$a_0 = 0, \quad a_1 \neq 0, \quad a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + a_{n+1}} \quad \text{при всех } n \geqslant 0.$$

Какие значения может принимать a_{2024}?

Ответ: только $1012\cdot 2025 = 2049300$.

Решение. Заметим, что $a_1 = \sqrt{a_1}$, откуда $a_1 = 1$.

Докажем по индукции, что $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$. База ($n = 1$) очевидна. Из формулы в условии следует, что

$$(a_{n+1} - a_n)^2 = a_n + a_{n+1}, \quad \text{т.е} \quad a_{n+1}^2 - (2a_n + 1)a_{n+1} + a_n^2 - a_n = 0.$$

Решая это уравнение относительно a_{n+1}, получим

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1 \pm \sqrt{8a_n + 1}}{2} = \frac{n(n+1) + 1 \pm \sqrt{4n(n+1) + 1}}{2} =$$

$$= \frac{n^2 + n + 1 \pm (2n+1)}{2}.$$

Так как по условию $a_{n+1} \geqslant a_n$, то

$$a_{n+1} = \frac{n^2+n+1+(2n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Итак, $a_{2024} = \frac{2024 \cdot 2025}{2} = 2049300.$

Вариант II

Задача 1. Все члены геометрической прогрессии положительны. Сумма первых 13 членов прогрессии равна 81, а сумма обратных величин этих членов равна 4. Найдите седьмой член прогрессии.

Ответ: $\frac{9}{2}$.

Решение. Пусть a_1, a_2, …, — наша прогрессия, q — её частное; $a_i = a_1 \cdot q^{i-1}$. По условию

$$81 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{13} = a_1 \cdot \left(1 + q + \ldots + q^{12}\right)$$
$$4 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{13}} = \frac{1}{a_1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^{12}}\right) = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 + q + \ldots + q^{12}}{q^{12}}.$$

Поделим первое выражение на второе, получим

$$\frac{81}{4} = a_1^2 \cdot q^{12},$$

откуда $a_7^2 = a_1^2 q^{12} = \frac{81}{4}$. Поскольку все члены прогрессии положительны, то $a_7 = \frac{9}{2}$.

Задача 2. На доске написаны числа 3, 9, 27, …, 3^{43}. За одну операцию Саша может выбрать два числа на доске, стереть их и записать на доску произведение стёртых чисел. Такими операциями он хочет добиться, чтобы на доске не нашлись одно или несколько чисел, произведение которых равно 3^{43} (произведение одного числа — это само это число). Какое наименьшее количество операций придётся сделать Саше?

Ответ: 11.

Решение. Для начала докажем, что меньше чем 11 операциями Саше не обойтись. Разобьём все числа, кроме 3^{43}, на пары: 3 и 3^{42}, 3^2 и 3^{41}, …, 3^{21} и 3^{22}. Заметим, что если хотя бы в одной паре останутся оба числа, то на доске останутся числа, произведение которых равно 3^{32}. Значит, в каждой паре хотя бы одно из чисел должно было участвовать хотя бы в одной операции. Кроме того, хотя бы в одной операции должно участвовать и само число 3^{43}. В каждой операции участвуют два числа, поэтому понабодиться на менее $(21+1)/2 = 11$ операций.

Теперь покажем, как Саша может справиться за 11 операций.

Способ 1. Разобьём все степени с нечётными показателями 3, 3^3, …, 3^{43} на пары произвольным образом, и перемножим все числа в парах. Теперь на доске написаны только степени с чётными показателями. Сумма чётных чисел не может быть 43.

Способ 2. Разобьём числа от 3 до 3^{21} и 3^{43} на пары: 3 и 3^{21}, 3^2 и 3^{20}, …, 3^{10} и 3^{12}, а также 3^{11} и 3^{42} — и перемножим числа в каждой паре. Теперь на доске написаны только числа от 3^{22} до 3^{42} и 3^{53}. Ни одно из них не равно 3^{43}, а произведение любых хотя бы двух — строго больше 3^{43}.

Задача 3. Партию новогодних шаров необходимо сложить в коробки так, чтобы в каждой коробке лежали шарики. Если использовать коробки вместимостью 100 шаров, то ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если взять на 3 коробки больше, но в которые помещается по 90 шаров, то вновь ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если же взять ещё на 6 коробок больше, но вместимостью 70 шаров, то все коробки будут полными. Сколько шаров могло быть в партии?

Ответ: 2170.

Решение. Пусть n — число коробок по 70 шаров. Тогда число шаров равно $70n$. Число коробок по 90 шаров равно $n-6$. Одна коробка оказывается неполной, поэтому $90(n-6) > 70n$. Партия шаров не помещается в $n-7$ коробок, поэтому $90(n-7) < 70n$. Аналогичные рассуждения применительно к коробкам по 100 шаров дают неравенства $100(n-9) > 70n$ и $100(n-10) < 70n$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 90(n-6) > 70n, \\ 90(n-7) < 70n, \\ 100(n-9) > 70n, \\ 100(n-10) < 70n. \end{cases}$$

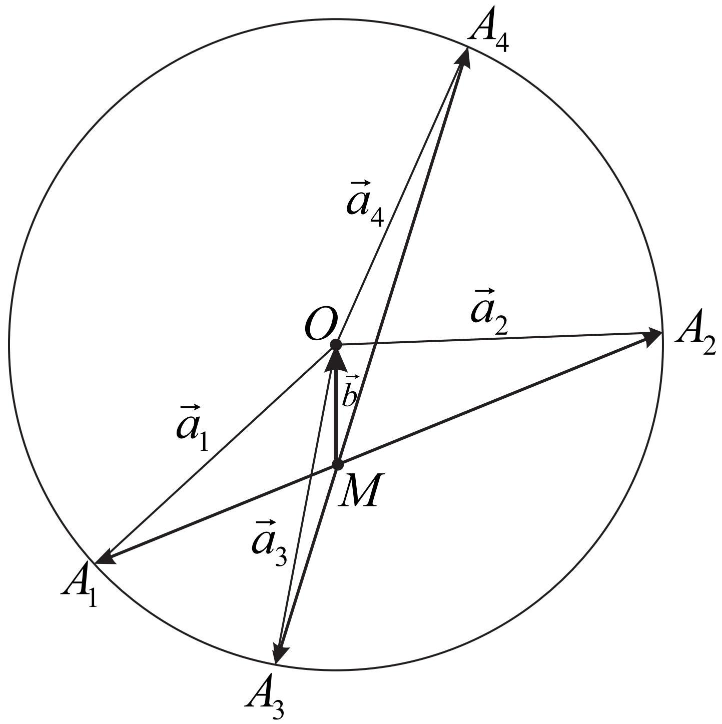
Откуда $2n > 54$, $2n < 63$, $3n > 90$, $3n < 100$. Значит, $28 \leqslant n$, $n \leqslant 31$, $31 \leqslant n$, $n \leqslant 33$. Единственное подходящее n равно 31.

Задача 4. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$, расположенные в одной плоскости с вектором $\vec{b}$, имеют равную длину, отличную от длины вектора $\vec{b}$. Известно, что $5\vec{a}_1 + 16\vec{a}_2 + 21\vec{b} = 5\vec{a}_3 + 4\vec{a}_4 + 9\vec{b} = \vec{0}$, $|\vec{a}_3 + \vec{b}| = 8$. Найдите $|\vec{a}_1 + \vec{b}|$.

Ответ: 16.

Решение. Из правила треугольника следует, что равенство, указанное в условии, может выполняться, только если $21|\vec{b}| \leqslant 5|\vec{a}_1| + 16|\vec{a}_2|$, но поскольку $|\vec{a}_i| \neq |\vec{b}|$, то $|\vec{b}| < |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$. Из второго равенства следует, что $|\vec{b}| < |\vec{a}_3| = |\vec{a}_4|$.

А теперь запишем их в следующем виде: $16(\vec{a}_2 + \vec{b}) = -5(\vec{a}_1 + \vec{b})$, $5(\vec{a}_3 + \vec{b}) = -4(\vec{a}_4 + \vec{b})$. Отсюда следует, что векторы $\vec{a}_1 + \vec{b}$ и $\vec{a}_2 + \vec{b}$ противоположно направлены. Аналогично, противоположно направленными векторами являются $\vec{a}_3 + \vec{b}$ и $\vec{a}_4 + \vec{b}$, причем $|\vec{a}_3 + \vec{b}| = 8$.



На рисунке выше $\overrightarrow{MO} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{OA_3} = \vec{a}_3$, $\overrightarrow{OA_4} = \vec{a}_4$. По условию $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = |\vec{a}_4|$. Следовательно, точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на окружности с центром в точке O. По теореме о пересекающихся хордах запишем $MA_1 \cdot MA_2 = MA_3 \cdot MA_4$, но $MA_1 = |\vec{a}_1 + \vec{b}|$, $MA_2 = |\vec{a}_2 + \vec{b}| = \frac{5}{16} MA_1$, $MA_3 = |\vec{a}_3 + \vec{b}| = 8$, $MA_4 = |\vec{a}_4 + \vec{b}| = \frac{5}{4} \cdot MA_3 = 10$. Следовательно, $\frac{5}{16} MA_1^2 = 8 \cdot 10$. Значит, $MA_1 = 16$.

Задача 5. Про действительные числа a, b, c известно, что

$$\begin{cases} ac - 1 = 4b^2, \\ 2bc - 1 = a^2 \end{cases}$$

Найдите все значения, чему может быть равно ab.

Ответ: $(0; +\infty)$.

Решение. Вычтем из первого уравнения второе, получим

$$c(a - 2b) = (2b - a)(2b + a) \text{ и } (a - 2b)(a + 2b + c) = 0.$$

Если $a + 2b + c = 0$, то $a = -2b - c$ и первое уравнение системы приводится к виду $3b^2 + (b + c)^2 = -1$, что невозможно. Значит, $a = 2b$ и система сводится к одному уравнению $2bc = 4b^2 + 1$, которое имеет решение относительно c при всех $b \neq 0$: $c = \frac{4b^2+1}{2b}$. Таким образом, $ab = 2b^2 > 0$, при этом любое положительное значение $d > 0$ произведение ab может принять: достаточно взять $b = \sqrt{\frac{d}{2}}, a = 2b, c = \frac{4b^2+1}{2b}$.

Задача 6. Решите уравнение

$$\sin\frac{88\pi^2}{x} = \frac{1}{\cos 7x}.$$

Ответ: -16π, $-\frac{176\pi}{7}$, 176π, $\frac{16\pi}{7}$.

Решение. Домножим на знаменатель

$$\sin\frac{88\pi^2}{x} \cdot \cos 7x = 1.$$

Тригонометрические функции ограничены, поэтому

$$\left|\sin\frac{88\pi^2}{x}\right| \leqslant 1, \qquad |\cos 7x| \leqslant 1.$$

Равенство в произведении возможно, если

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin\dfrac{88\pi^2}{x} = 1, \\ \cos 7x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin\dfrac{88\pi^2}{x} = -1, \\ \cos 7x = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{88\pi^2}{x} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \\ 7x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{88\pi^2}{x} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \\ 7x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right.$$

Вторая система не имеет решений, ведь после перемножения равенств, домножения на $\frac{2}{\pi^2}$, получаем $2 \cdot 7 \cdot 88 = (1+2n)(-1+4m)$, что невозможно для целых n и m. Чтобы существовало решение первой системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$88\pi^2 \cdot 7 = 2\pi n \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right),$$

т.е. $2^3 \cdot 7 \cdot 11 = n(4m+1)$. У числа $2^3 \cdot 7 \cdot 11$ имеется 4 делителя вида $4m+1$: это 1, $7 \cdot 11$, -7, -11, откуда $m = 0$, $m = 19$, $m = -2$, $m = -3$, откуда и следует ответ.

Задача 7. Наименьшее значение функции

$$\sqrt{x_1^2 + 2^2} + \sqrt{x_2^2 + 4^2} + \sqrt{x_3^2 + 8^2} + \ldots + \sqrt{x_{2024}^2 + \left(2^{2024}\right)^2}$$

для неотрицательных x_1, x_2, $\ldots$, x_{2024}, сумма которых равна k, равно 2^{2025}. При каком значении параметра k такое возможно?

Ответ: только $\sqrt{4 \cdot 2^{2025} - 4}$.

Решение. Заметим, что если на координатной плоскости по оси x последовательно отложить отрезки длины x_1, x_2, $\ldots$, x_{2024}, а по оси y соответственно отрезки равные по длине значениям членов последовательности 2, 4, ..., 2^{2024}, то значение функции есть сумма длин гипотенуз с соответствующими катетами (длина ломаной). Тогда наименьшее значение функции — это длина кратчайшей ломаной, т. е. длина отрезка (гипотенуза треугольника с катетами k и $2+4+\ldots+2^{2024}$).

Это геометрическая прогрессия. Просуммируем ее

$$2+4+\ldots+2^{2024}=2^{2025}-2.$$

Тогда значение параметра найдем из равенства

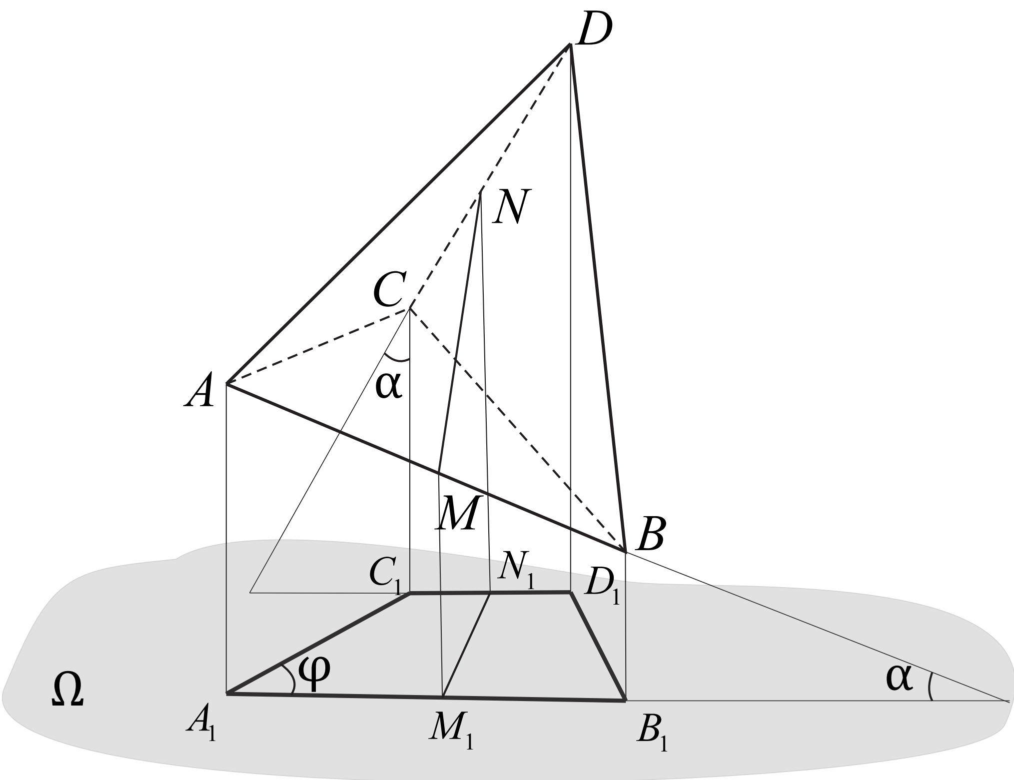
$$\sqrt{k^2+(2^{2025}-2)^2}=2^{2025}.$$

То есть $k=\sqrt{(2^{2025})^2-(2^{2025}-2)^2}=\sqrt{4\cdot 2^{2025}-4}$.

Задача 8. Ортогональной проекцией правильной треугольной пирамиды на некоторую плоскость является равнобокая трапеция. Известно, что площадь трапеции составляет $30\sqrt{2}$, а полная поверхность пирамиды равна $100\sqrt{3}$. Найдите периметр трапеции.

Ответ. 28.

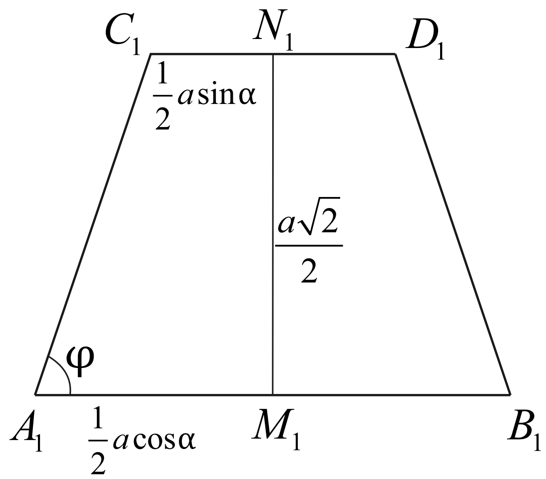
Решение. Пусть сторона основания пирамиды $DABC$ с вершиной D равна a, а боковое ребро равно b. Для построения проекции достаточно рассмотреть пару скрещивающихся рёбер, например AB и CD, проекции которых являются основаниями трапеции (рисунок ниже).



Пусть MN — общий перпендикуляр этой пары рёбер. Очевидно, M — середина AB и $MN\perp AD$. Проекция MN на плоскость Ω — это отрезок M_1N_1, являющийся высотой трапеции $A_1B_1D_1C_1$. На рисунке выше показан именно такой порядок следования вершин трапеции, но при другом угле наклона пирамиды (которая может вращаться вокруг оси MN) положение точек C_1 и D_1 может измениться так, что боковыми сторонами трапеции будут отрезки A_1D_1 и B_1C_1, что не влияет на решение задачи.

При ортогональном проектировании сохраняется отношение длин параллельных отрезков, поэтому M_1 — середина A_1B_1. По условию $A_1B_1D_1C_1$ — равнобедренная трапеция, отсюда делаем вывод, что N_1 — середина C_1D_1, а, значит, и N — середина CD. Но это возможно только в правильном тетраэдре. Следовательно, все рёбра пирамиды равны a. Полная поверхность $a^2\sqrt{3}=100\sqrt{3}$, откуда $a=10$.

Теперь рассмотрим проекцию пирамиды более детально (рисунок ниже).



Пусть угол наклона прямой AB к плоскости Ω равен α, тогда вследствие перпендикулярности скрещивающихся рёбер правильной пирамиды угол наклона прямой CD к плоскости Ω составляет $90^\circ - \alpha$ (см. первый рисунок). Отсюда $A_1M_1 = \frac{1}{2}a\cos\alpha = 5\cos\alpha$, $C_1N_1 = \frac{1}{2}a\sin\alpha = 5\sin\alpha$. Но $M_1N_1 = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ (расстояние между скрещивающимися рёбрами правильного тетраэдра). Площадь трапеции $S = 25\sqrt{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$. По условию $S = 30\sqrt{2}$. Получим уравнение $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{6}{5}$. После возведения в квадрат найдём $\sin 2\alpha = \frac{11}{25}$.

Вычислим периметр трапеции, применив теорему Пифагора: $P = a(\sin\alpha + \cos\alpha) + 2A_1C_1 = 10 \cdot \frac{6}{5} + 2\sqrt{(5\sqrt{2})^2 + 25(\cos\alpha - \sin\alpha)^2} = 12 + 2\sqrt{50 + 25(1 - \sin 2\alpha)} = 12 + 2\sqrt{75 - 11} = 12 + 16 = 28$.

Задача 9. Функция f, определённая на действительных числах, принимает действительные значения. Известно, что для любых действительных x и y выполнено равенство $f(x)f(y) = f(9x - y)$. Найдите все такие функции f.

Ответ: $f(x) = 0$ и $f(x) = 1$.

Решение. Подставим $y = 9x - z$, тогда $f(x)f(9x - z) = f(z)$. Если для некоторого x выполнено $f(x) = 0$, тогда получаем, что и для любого z выполнено $f(z) = 0$, т.е. функция постоянная и равна нулю.

Если же функция не принимает значение 0, то подставим $y = 4{,}5x$. Тогда $f(x)f(4{,}5x) = f(4{,}5x)$, после сокращения на $f(4{,}5x) \neq 0$, получаем $f(x) = 1$, т.е. функция постоянная и равна 1.

Задача 10. Последовательность (a_n) удовлетворяет условиям

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n + a_{n+1}} \quad \text{при всех } n \geqslant 1.$$

Какие значения может принимать a_{2024}?

Ответ: только $1012 \cdot 2025 = 2049300$.

Решение. Докажем по индукции, что $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$. База ($n = 1$) очевидна. Из формулы в условии следует, что

$$(a_{n+1} - a_n)^2 = a_n + a_{n+1}, \quad \text{т.е} \quad a_{n+1}^2 - (2a_n + 1)a_{n+1} + a_n^2 - a_n = 0.$$

Решая это уравнение относительно a_{n+1}, получим

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1 \pm \sqrt{8a_n + 1}}{2} = \frac{n(n+1) + 1 \pm \sqrt{4n(n+1) + 1}}{2} =$$

$$= \frac{n^2 + n + 1 \pm (2n + 1)}{2}.$$

Так как по условию $a_{n+1} \geqslant a_n$, то

$$a_{n+1} = \frac{n^2 + n + 1 + (2n + 1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Итак, $a_{2024} = \frac{2024 \cdot 2025}{2} = 2049300$.

Вариант III

Задача 1. Все члены геометрической прогрессии положительны. Сумма первых 15 членов прогрессии равна 58, а сумма обратных величин этих членов равна 14,5. Найдите восьмой член прогрессии.

Ответ: 2.

Решение. Пусть a_1, a_2, …, — наша прогрессия, q — её частное; $a_i = a_1 \cdot q^{i-1}$. По условию

$$58 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{15} = a_1 \cdot \left(1 + q + \ldots + q^{14}\right)$$

$$14{,}5 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{15}} = \frac{1}{a_1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^{14}}\right) = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 + q + \ldots + q^{14}}{q^{14}}.$$

Поделим первое выражение на второе, получим

$$\frac{58}{14{,}5} = a_1^2 \cdot q^{14},$$

откуда $a_8^2 = a_1^2 q^{14} = 4$. Поскольку все члены прогрессии положительны, то $a_8 = 2$.

Задача 2. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 36. За одну операцию Саша может выбрать два числа на доске, стереть их и записать на доску сумму стёртых чисел. Такими операциями он хочет добиться, чтобы на доске не нашлись одно или несколько чисел, сумма которых равна 37 (сумма одного числа — это само это число). Какое наименьшее количество операций придётся сделать Саше?

Ответ: 9.

Решение. Для начала докажем, что меньше чем 9 операциями Саше не обойтись. Разобьём числа на пары: 1 и 36, 2 и 35, …, 18 и 19. Заметим, что если хотя бы одной паре останутся оба числа, то на доске останутся числа, сумма которых равна 37. Значит, в каждой паре хотя бы одно из чисел должно было участвовать хотя бы в одной операции. В каждой операции участвуют два числа, поэтому понабодиться на менее 9 операций.

Теперь покажем, как Саша может справиться за 9 операций.

Способ 1. Разобьём все нечётные числа 1, 3, …, 35 на пары произвольным образом, и сложим все числа в парах. Теперь на доске написано только чётные числа. Сумма чётных чисел не может быть 37.

Способ 2. Разобьём числа от 1 до 18 на пары: 1 и 18, 2 и 17, …, 9 и 10, — и сложим числа в каждой паре. Теперь на доске написаны только числа от 19 до 36. Ни одно из них не равно 37, а сумма любых хотя бы двух — строго больше 37.

Задача 3. Партию новогодних шаров необходимо сложить в коробки так, чтобы в каждой коробке лежали шарики. Если использовать коробки вместимостью 100 шаров, то ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если взять на 11 коробок больше, но в которые помещается по 70 шаров, то вновь ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если же взять ещё на 5 коробок больше, но вместимостью 60 шаров, то все коробки будут полными. Сколько шаров могло быть в партии?

Ответ: 2460.

Решение. Пусть n — число коробок по 60 шаров. Тогда число шаров равно $60n$. Число коробок по 70 шаров равно $n-5$. Одна коробка оказывается неполной, поэтому $70(n-5) > 60n$. Партия шаров не помещается в $n-6$ коробок, поэтому $70(n-6) < 60n$. Аналогичные рассуждения применительно к коробкам по 100 шаров дают неравенства $100(n-16) > 60n$ и $100(n-17) < 60n$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 70(n-5) > 60n, \\ 70(n-6) < 60n, \\ 100(n-16) > 60n, \\ 100(n-17) < 60n. \end{cases}$$

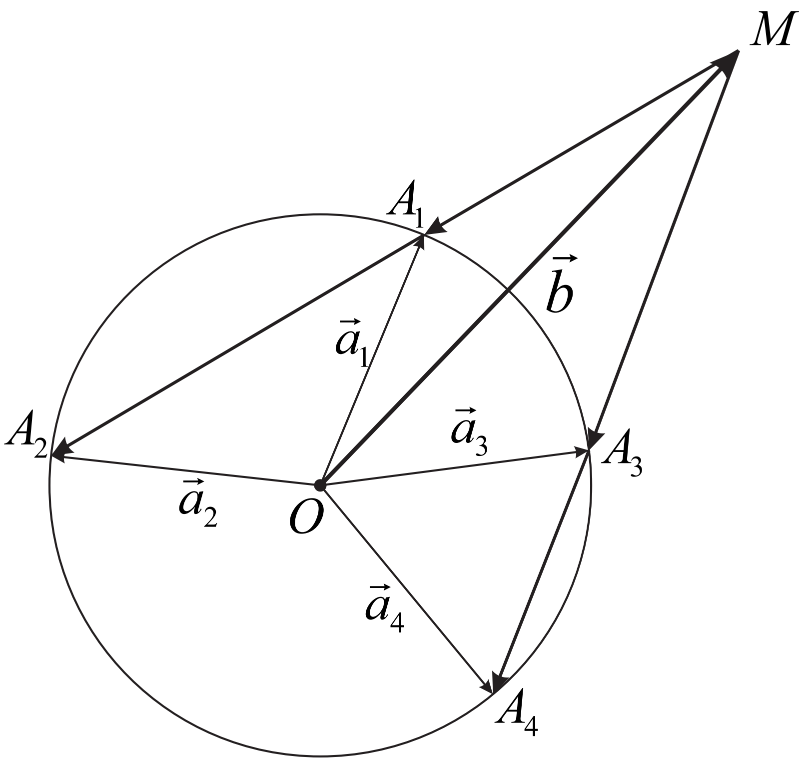
Откуда $n > 35$, $n < 42$, $2n > 80$, $2n < 85$. Значит, $36 \leqslant n$, $n \leqslant 41$, $41 \leqslant n$, $n \leqslant 42$. Единственное подходящее n равно 41.

Задача 4. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$, расположенные в одной плоскости с вектором $\vec{b}$, имеют равную длину, отличную от длины вектора $\vec{b}$. Известно, что $9\vec{a}_1 - 4\vec{a}_2 - 5\vec{b} = 16\vec{a}_3 - 9\vec{a}_4 - 7\vec{b} = \vec{0}$, $|\vec{a}_1 - \vec{b}| = 8$. Найдите $|\vec{a}_3 - \vec{b}|$.

Ответ: 9.

Решение. Из правила треугольника следует, что равенство, указанное в условии, может выполняться, только если $9|\vec{a}_1| \leqslant 4|\vec{a}_2| + 5|\vec{b}|$, но поскольку $|\vec{a}_i| \neq |\vec{b}|$, то $|\vec{b}| > |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$. Из второго равенства следует, что $|\vec{b}| > |\vec{a}_3| = |\vec{a}_4|$.

А теперь запишем их в следующем виде: $4(\vec{a}_2 - \vec{b}) = 9(\vec{a}_1 - \vec{b})$, $16(\vec{a}_3 - \vec{b}) = 9(\vec{a}_4 - \vec{b})$. Отсюда следует, что векторы $\vec{a}_1 - \vec{b}$ и $\vec{a}_2 - \vec{b}$ одинаково направлены, причем $|\vec{a}_2 - \vec{b}| = \frac{9}{4} \cdot |\vec{a}_1 - \vec{b}| = \frac{9}{4} \cdot 8 = 18$. Аналогично, одинаково направленными векторами являются $\vec{a}_3 - \vec{b}$ и $\vec{a}_4 - \vec{b}$.



На рисунке выше $\overrightarrow{OM} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{OA_3} = \vec{a}_3$, $\overrightarrow{OA_4} = \vec{a}_4$. По условию $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = |\vec{a}_4|$. Следовательно, точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на окружности с центром в точке O. По теореме о двух секущих $MA_1 \cdot MA_2 = MA_3 \cdot MA_4$, но $MA_1 = |\vec{a}_1 - \vec{b}| = 8$, $MA_2 = |\vec{a}_2 - \vec{b}| = 18$, $MA_3 = |\vec{a}_3 - \vec{b}|$, $MA_4 = |\vec{a}_4 - \vec{b}| = \frac{16}{9}MA_3$. Следовательно, $8 \cdot 18 = \frac{16}{9} \cdot MA_3^2$. Значит, $MA_3 = 9$.

Задача 5. Про действительные числа a, b, c известно, что

$$\begin{cases} ac - 2 = 9b^2, \\ 3bc - 2 = a^2 \end{cases}$$

Найдите все значения, чему может быть равно ab.

Ответ: $(0; +\infty)$.

Решение. Вычтем из первого уравнения второе, получим

$$c(a - 3b) = (3b - a)(3b + a) \text{ и } (a - 3b)(a + 3b + c) = 0.$$

Если $a + 3b + c = 0$, то $a = -3b - c$ и первое уравнение системы приводится к виду $\frac{27b^2}{4} + (\frac{3b}{2} + c)^2 = -2$, что невозможно. Значит, $a = 3b$ и система сводится к одному уравнению $3bc = 9b^2 + 2$, которое имеет решение относительно c при всех $b \neq 0$: $c = \frac{9b^2+2}{3b}$. Таким образом, $ab = 3b^2 > 0$, при этом любое положительное значение $d > 0$ произведение ab может принять: достаточно взять $b = \sqrt{\frac{d}{3}}, a = 3b, c = \frac{9b^2+2}{3b}$.

Задача 6. Решите уравнение

$$\sin\frac{88\pi^2}{x} = \frac{1}{\cos 3x}.$$

Ответ: -16π, $-\frac{176\pi}{3}$, 176π, $\frac{16\pi}{3}$.

Решение. Домножим на знаменатель

$$\sin\frac{88\pi^2}{x}\cdot\cos 3x = 1.$$

Тригонометрические функции ограничены, поэтому

$$\left|\sin\frac{88\pi^2}{x}\right| \leqslant 1, \qquad |\cos 3x| \leqslant 1.$$

Равенство в произведении возможно, если

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\dfrac{88\pi^2}{x} = 1,\\ \cos 3x = 1,\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\dfrac{88\pi^2}{x} = -1,\\ \cos 3x = -1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{88\pi^2}{x} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m\in\mathbb{Z}\\ 3x = 2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{88\pi^2}{x} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m\in\mathbb{Z}\\ 3x = \pi + 2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right.$$

Вторая система не имеет решений, ведь после перемножения равенств, домножения на $\frac{2}{\pi^2}$, получаем $2\cdot 3\cdot 88 = (1+2n)(-1+4m)$, что невозможно для целых n и m. Чтобы существовало решение первой системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$88\pi^2\cdot 3 = 2\pi n\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right),$$

т.е. $2^3\cdot 3\cdot 11 = n(4m+1)$. У числа $2^3\cdot 3\cdot 11$ имеется 4 делителя вида $4m+1$: это 1, $3\cdot 11$, -3, -11, откуда $m = 0$, $m = 8$, $m = -1$, $m = -3$, откуда и следует ответ.

Задача 7. Наименьшее значение функции

$$\sqrt{x_1^2+1^2} + \sqrt{x_2^2+2^2} + \sqrt{x_3^2+3^2} + \ldots + \sqrt{x_{2024}^2+2024^2}$$

для неотрицательных $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$, сумма которых равна k, равно $2024\cdot 2025$. При каком значении параметра k такое возможно?

Ответ: только $2025\cdot 1012\cdot\sqrt{3}$.

Решение. Заметим, что если на координатной плоскости по оси x последовательно отложить отрезки длины $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$, а по оси y соответственно отрезки равные по длине значениям членов последовательности $1, 2, \ldots, 2024$, то значение функции есть сумма длин гипотенуз с соответствующими катетами (длина ломаной). Тогда наименьшее значение функции — это длина кратчайшей ломаной, т. е. длина отрезка (гипотенуза треугольника с катетами k и $1+2+\ldots+2024$).

Это арифметическая прогрессия. Просуммируем ее

$$1 + 2 + \ldots + 2024 = \frac{2024 \cdot 2025}{2} = 2025 \cdot 1012.$$

Тогда значение параметра найдем из равенства

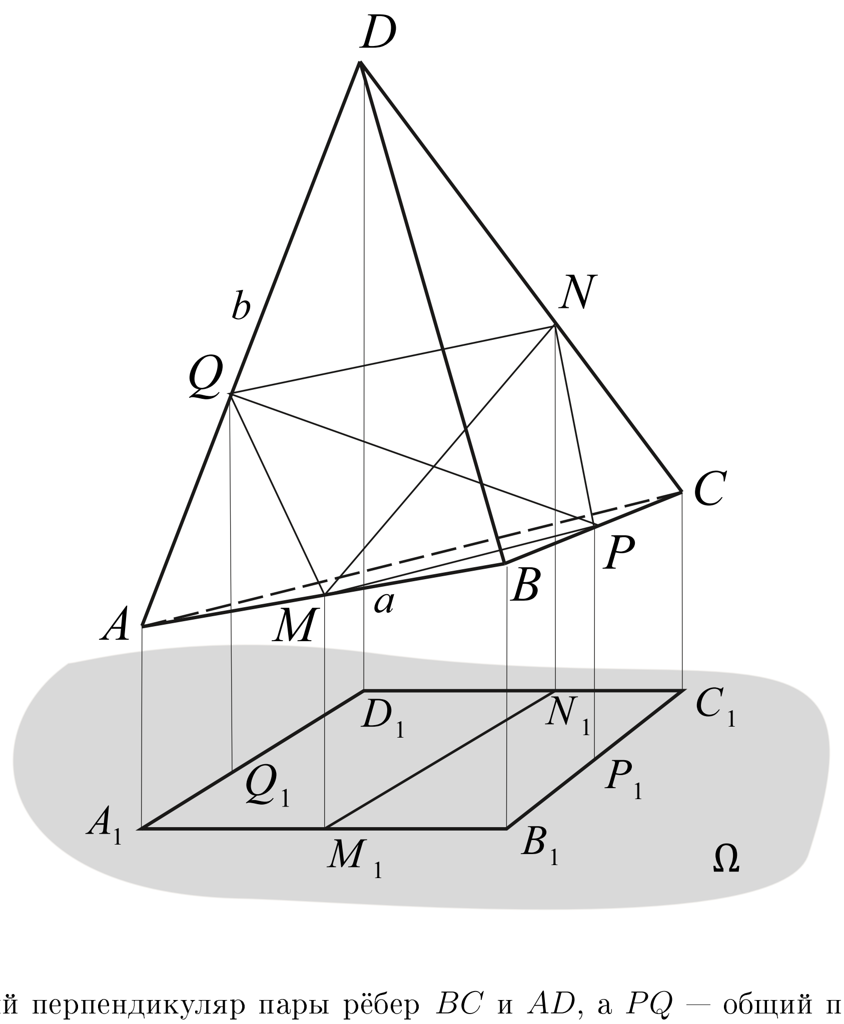
$$\sqrt{k^2 + 2025^2 \cdot 1012^2} = 2024 \cdot 2025.$$

То есть $k = \sqrt{2025^2 \cdot 2024^2 - 2025^2 \cdot 1012^2} = 2025 \cdot 1012 \cdot \sqrt{3}$.

Задача 8. Ортогональной проекцией правильной треугольной пирамиды на некоторую плоскость является параллелограмм с острым углом 60°. Найдите объём пирамиды, если её боковая поверхность равна 54.

Ответ: 36.

Решение. Пусть сторона основания пирамиды $DABC$ с вершиной D равна a, а боковое ребро равно b. Для построения проекции достаточно рассмотреть две пары скрещивающихся рёбер, например AB, CD, BC и AD, проекции которых являются сторонами параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ (рисунок ниже).



Пусть MN — общий перпендикуляр пары рёбер BC и AD, а PQ — общий перпендикуляр скрещивающихся рёбер BC и AD. Плоскость проекции Ω параллельна как MN, так и PQ, поскольку ортогональной проекцией пирамиды является параллелограмм. Отрезки MN и PQ проектируются на плоскость Ω без изменения длины в высоты параллелограмма M_1N_1 и P_1Q_1. Поскольку пирамида правильная, $MN = PQ$. Следовательно, $M_1N_1 = P_1Q_1$. В параллелограмме $A_1B_1C_1D_1$ высоты, проведённые к смежным сторонам, равны — значит, параллелограмм является ромбом.

Пусть ребро AB наклонено к плоскости Ω под углом α, тогда ребро CD, которое перпендикулярно AB, наклонено под углом $90^\circ - \alpha$. Отсюда $a\cos\alpha = b\sin\alpha$.

Обозначим $\frac{a}{b}=\lambda$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\lambda$, $A_1B_1=a\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{1+\lambda^2}}$.

Найдём расстояние между скрещивающимися рёбрами правильной треугольной пирамиды как высоту сечения DMC: $MC\cdot H=b\cdot MN$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}=b\cdot MN$, откуда $MN=\frac{a}{2b}\sqrt{3b^2-a^2}=\frac{a}{2}\sqrt{3-\lambda^2}$. Тогда синус острого угла пирамиды равен $\sin\varphi=\frac{M_1N_1}{A_1D_1}=\frac{MN}{A_1B_1}$. Подставляя найденные выражения и данное в условии значение $\varphi=60^\circ$, получим $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{3-\lambda^2}\sqrt{1+\lambda^2}$, откуда $\lambda=0$ (что невозможно) или $\lambda^2=2$.

Боковая поверхность пирамиды равна $S=\frac{3a}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{\lambda}$. Подставив $S=54$ и $\lambda=\sqrt{2}$, найдём $a^2=72$ и $b^2=\frac{a^2}{\lambda^2}=36$.

Объём правильной пирамиды равен $V=\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}=6\sqrt{108-72}=36$.

Задача 9. Функция f, определённая на действительных числах, принимает действительные значения. Известно, что для любых действительных x и y выполнено равенство $f(x)f(y)=f(5x-y)$. Найдите все такие функции f.

Ответ: $f(x)=0$ и $f(x)=1$.

Решение. Подставим $y=5x-z$, тогда $f(x)f(5x-z)=f(z)$. Если для некоторого x выполнено $f(x)=0$, тогда получаем, что и для любого z выполнено $f(z)=0$, т.е. функция постоянная и равна нулю.

Если же функция не принимает значение 0, то подставим $y=2{,}5x$. Тогда $f(x)f(2{,}5x)=f(2{,}5x)$, после сокращения на $f(2{,}5x)\neq 0$, получаем $f(x)=1$, т.е. функция постоянная и равна 1.

Задача 10. Последовательность (a_n) удовлетворяет условиям

$$a_1=1,\quad a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n+a_{n+1}}\quad \text{при всех } n\geqslant 1.$$

Какие значения может принимать a_{2023}?

Ответ: только $1012\cdot 2023=2047276$.

Решение. Докажем по индукции, что $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$. База ($n=1$) очевидна. Из формулы в условии следует, что

$$(a_{n+1}-a_n)^2=a_n+a_{n+1},\quad \text{т.е}\quad a_{n+1}^2-(2a_n+1)a_{n+1}+a_n^2-a_n=0.$$

Решая это уравнение относительно a_{n+1}, получим

$$a_{n+1}=\frac{2a_n+1\pm\sqrt{8a_n+1}}{2}=\frac{n(n+1)+1\pm\sqrt{4n(n+1)+1}}{2}=$$

$$=\frac{n^2+n+1\pm(2n+1)}{2}.$$

Так как по условию $a_{n+1}\geqslant a_n$, то

$$a_{n+1}=\frac{n^2+n+1+(2n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Итак, $a_{2023}=\frac{2024\cdot 2023}{2}=2047276$.

Вариант IV

Задача 1. Все члены геометрической прогрессии положительны. Сумма первых 9 членов прогрессии равна 2,75, а сумма обратных величин этих членов равна 44. Найти пятый член прогрессии.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Решение. Пусть a_1, a_2, ..., — наша прогрессия, q — её частное; $a_i = a_1 \cdot q^{i-1}$. По условию

$$2{,}75 = a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = a_1 \cdot \left(1 + q + \ldots + q^8\right)$$

$$44 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_9} = \frac{1}{a_1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^8}\right) = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 + q + \ldots + q^8}{q^8}.$$

Поделим первое выражение на второе, получим

$$\frac{2{,}75}{44} = a_1^2 \cdot q^8,$$

откуда $a_5^2 = a_1^2 q^8 = \frac{1}{16}$. Поскольку все члены прогрессии положительны, то $a_6 = \frac{1}{4}$.

Задача 2. На доске написаны числа $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ..., $\frac{1}{2^{24}}$. За одну операцию Саша может выбрать два числа на доске, стереть их и записать на доску произведение стёртых чисел. Такими операциями он хочет добиться, чтобы на доске не нашлись одно или несколько чисел, произведение которых равно $\frac{1}{2^{25}}$ (произведение одного числа — это само это число). Какое наименьшее количество операций придётся сделать Саше?

Ответ: 6.

Решение. Для начала докажем, что меньше чем 6 операциями Саше не обойтись. Разобьём числа на пары: $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2^{24}}$, $\frac{1}{2^2}$ и $\frac{1}{2^{23}}$, ..., $\frac{1}{2^{12}}$ и $\frac{1}{2^{13}}$. Заметим, что если хотя бы одной паре останутся оба числа, то на доске останутся числа, произведение которых равно $\frac{1}{2^{25}}$. Значит, в каждой паре хотя бы одно из чисел должно было участвовать хотя бы в одной операции. В каждой операции участвуют два числа, поэтому понабодиться на менее 6 операций.

Теперь покажем, как Саша может справиться за 6 операций.

Способ 1. Разобьём все числа с нечётными показателями $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^3}$, ..., $\frac{1}{2^{23}}$ на пары произвольным образом, и перемножим все числа в парах. Теперь на доске написаны только числа с чётными показателями в степени. Сумма чётных чисел не может быть 25.

Способ 2. Разобьём числа от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{2^12}$ на пары: $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2^{12}}$, $\frac{1}{2^2}$ и $\frac{1}{2^{11}}$, ..., $\frac{1}{2^6}$ и $\frac{1}{2^7}$, — и перемножим числа в каждой паре. Теперь на доске написаны только числа от $\frac{1}{2^{13}}$ до $\frac{1}{2^{24}}$. Ни одно из них не равно $\frac{1}{2^{25}}$, а произведение любых хотя бы двух — строго меньше $\frac{1}{2^{25}}$.

Задача 3. Партию новогодних шаров необходимо сложить в коробки так, чтобы в каждой коробке лежали шарики. Если использовать коробки вместимостью 70 шаров, то ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если взять на 7 коробок больше, но в которые помещается по 50 шаров, то вновь ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если же взять ещё на 5 коробок больше, но вместимостью 40 шаров, то все коробки будут полными. Сколько шаров могло быть в партии?

Ответ: 1160.

Решение. Пусть n — число коробок по 40 шаров. Тогда число шаров равно $40n$. Число коробок по 50 шаров равно $n-5$. Одна коробка оказывается неполной, поэтому $50(n-5) > 40n$. Партия шаров не помещается в $n-6$ коробок, поэтому $50(n-6) < 40n$. Аналогичные рассуждения применительно к коробкам по 70 шаров дают неравенства $70(n-12) > 40n$ и $70(n-13) < 40n$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 50(n-5) > 40n, \\ 50(n-6) < 40n, \\ 70(n-12) > 40n, \\ 70(n-13) < 40n. \end{cases}$$

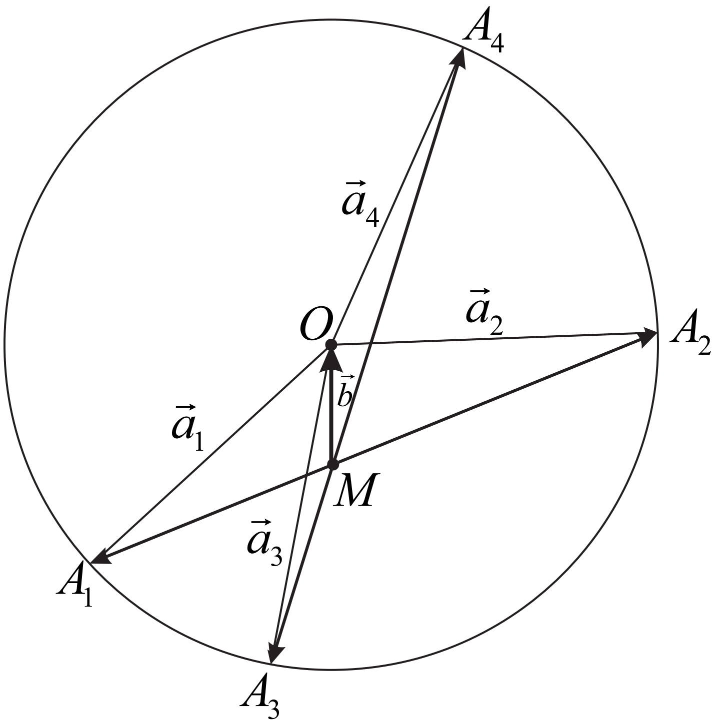
Откуда $n > 25$, $n < 30$, $3n > 84$, $3n < 91$. Значит, $26 \leqslant n$, $n \leqslant 29$, $29 \leqslant n$, $n \leqslant 30$. Единственное подходящее n равно 29.

Задача 4. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$, расположенные в одной плоскости с вектором $\vec{b}$, имеют равную длину, отличную от длины вектора $\vec{b}$. Известно, что $2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 3\vec{b} = \vec{a}_3 + 8\vec{a}_4 + 9\vec{b} = \vec{0}$, $|\vec{a}_1 + \vec{b}| = 4$. Найдите $|\vec{a}_4 + \vec{b}|$.

Ответ: 2.

Решение. Решение. Из правила треугольника следует, что равенство, указанное в условии, может выполняться, только если $3|\vec{b}| \leqslant 2|\vec{a}_1| + |\vec{a}_2|$, но поскольку $|\vec{a}_i| \neq |\vec{b}|$, то $|\vec{b}| < |\vec{a}_i|$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Тот же вывод следует и из второго равенства.

А теперь запишем их в следующем виде: $\vec{a}_2 + \vec{b} = -2(\vec{a}_1 + \vec{b})$, $\vec{a}_3 + \vec{b} = -8(\vec{a}_4 + \vec{b})$. Отсюда следует, что векторы $\vec{a}_1 + \vec{b}$ и $\vec{a}_2 + \vec{b}$ противоположно направлены, причем $|\vec{a}_2 + \vec{b}| = 2 \cdot |\vec{a}_1 + \vec{b}| = 2 \cdot 4 = 8$. Аналогично, противоположно направленными векторами являются $\vec{a}_3 + \vec{b}$ и $\vec{a}_4 + \vec{b}$.



На рисунке выше $\overrightarrow{MO} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{OA_3} = \vec{a}_3$, $\overrightarrow{OA_4} = \vec{a}_4$. По условию $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = |\vec{a}_4|$. Следовательно, точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на окружности с центром в точке O. По теореме о пересекающихся хордах запишем $MA_1 \cdot MA_2 = MA_3 \cdot MA_4$, но $MA_1 = |\vec{b} + \vec{a}_1| = 4$, $MA_2 = |\vec{a}_2 + \vec{b}| = 8$, $MA_3 = |\vec{b} + \vec{a}_3| = 8 \cdot |\vec{b} + \vec{a}_4| = 8 \cdot MA_4$. Следовательно, $4 \cdot 8 = 8 \cdot |\vec{a}_4 + \vec{b}|^2$. Значит, $|\vec{a}_4 + \vec{b}| = 2$.

Задача 5. Про действительные числа a, b, c известно, что

$$\begin{cases} ac - 1 = 9b^2, \\ 3bc - 1 = a^2 \end{cases}$$

Найдите все значения, чему может быть равно ab.

Ответ: $(0; +\infty)$.

Решение. Вычтем из первого уравнения второе, получим

$$c(a - 3b) = (3b - a)(3b + a) \text{ и } (a - 3b)(a + 3b + c) = 0.$$

Если $a + 3b + c = 0$, то $a = -3b - c$ и первое уравнение системы приводится к виду $\frac{27b^2}{4} + (\frac{3b}{2} + c)^2 = -1$, что невозможно. Значит, $a = 3b$ и система сводится к одному уравнению $3bc = 9b^2 + 1$, которое имеет решение относительно c при всех $b \neq 0$: $c = \frac{9b^2+1}{3b}$. Таким образом, $ab = 3b^2 > 0$, при этом любое положительное значение $d>0$ произведение ab может принять: достаточно взять $b=\sqrt{\frac{d}{3}}, a=3b, c=\frac{9b^2+1}{3b}$.

Задача 6. Решите уравнение

$$\cos\frac{88\pi^2}{x}=\frac{1}{\sin 7x}.$$

Ответ: $-\frac{11\pi}{14}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{14}$, $\frac{11\pi}{2}$.

Решение. Домножим на знаменатель

$$\cos\frac{88\pi^2}{x}\cdot\sin 7x=1.$$

Тригонометрические функции ограничены, поэтому

$$\left|\cos\frac{88\pi^2}{x}\right|\leqslant 1, \qquad |\sin 7x|\leqslant 1.$$

Равенство в произведении возможно, если

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\cos\dfrac{88\pi^2}{x}=1,\\ \sin 7x=1,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\cos\dfrac{88\pi^2}{x}=-1,\\ \sin 7x=-1.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{88\pi^2}{x}=2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}\\ 7x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m, \quad m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{88\pi^2}{x}=\pi+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}\\ 7x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m, \quad m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Вторая система не имеет решений, ведь после перемножения равенств, домножения на $\frac{2}{\pi^2}$, получаем $2\cdot 3\cdot 88=(1+2n)(-1+4m)$, что невозможно для целых n и m. Чтобы существовало решение первой системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$88\pi^2\cdot 7=2\pi n\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right),$$

т.е. $2^3\cdot 7\cdot 11=n(4m+1)$. У числа $2^3\cdot 7\cdot 11$ имеется 4 делителя вида $4m+1$: это 1, $7\cdot 11$, -7, -11, откуда $m=0$, $m=19$, $m=-2$, $m=-3$, откуда и следует ответ.

Задача 7. Наименьшее значение функции

$$\sqrt{x_1^2+1^2}+\sqrt{x_2^2+2^2}+\sqrt{x_3^2+4^2}+\ldots+\sqrt{x_{2024}^2+\left(2^{2023}\right)^2}$$

для неотрицательных x_1, x_2, $\ldots$, x_{2024}, сумма которых равна k, равно 2^{2024}. При каком значении параметра k такое возможно?

Ответ: только $\sqrt{2\cdot 2^{2025}-1}$.

Решение. Заметим, что если на координатной плоскости по оси x последовательно отложить отрезки длины x_1, x_2, $\ldots$, x_{2024}, а по оси y соответственно отрезки равные по длине значениям членов последовательности 1, 2, $\ldots$, 2^{2023}, то значение функции есть сумма длин гипотенуз с соответствующими катетами (длина ломаной). Тогда наименьшее значение функции — это длина кратчайшей ломаной, т. е. длина отрезка (гипотенуза треугольника с катетами k и $1+2+\ldots+2^{2023}$).

Это геометрическая прогрессия. Просуммируем ее

$$1 + 2 + \ldots + 2^{2023} = 2^{2024} - 1.$$

Тогда значение параметра найдем из равенства

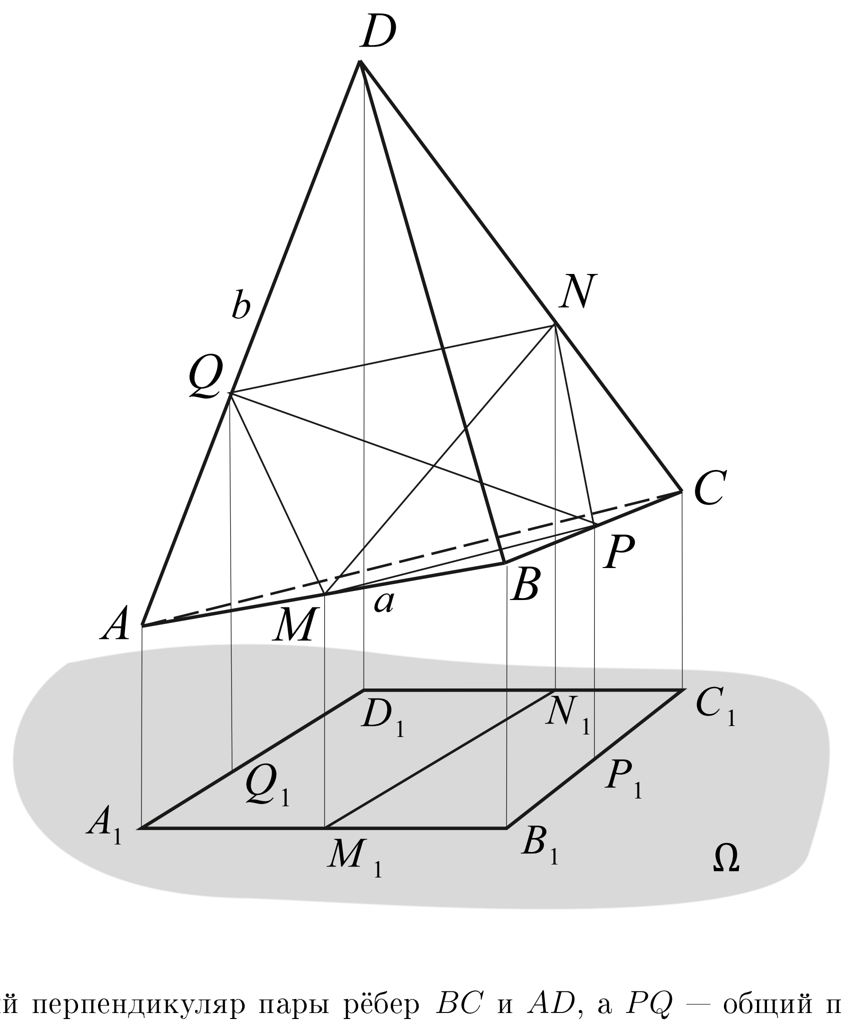
$$\sqrt{k^2 + (2^{2024} - 1)^2} = 2^{2024}.$$

То есть $k = \sqrt{(2^{2024})^2 - (2^{2024} - 1)^2} = \sqrt{2 \cdot 2^{2024} - 1}$.

Задача 8. Ортогональной проекцией правильной треугольной пирамиды на некоторую плоскость является параллелограмм, площадь которого равна $6\sqrt{15}$. Найдите объём пирамиды, если её боковая поверхность составляет $15\sqrt{15}$.

Ответ: $10\sqrt{15}$.

Решение. Пусть сторона основания пирамиды $DABC$ с вершиной D равна a, а боковое ребро равно b. Для построения проекции достаточно рассмотреть две пары скрещивающихся рёбер, например AB, CD, BC и AD, проекции которых являются сторонами параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ (рисунок ниже).



Пусть MN — общий перпендикуляр пары рёбер BC и AD, а PQ — общий перпендикуляр скрещивающихся рёбер BC и AD. Плоскость проекции Ω параллельна как MN, так и PQ, поскольку ортогональной проекцией пирамиды является параллелограмм. Отрезки MN и PQ проектируются на плоскость Ω без изменения длины в высоты параллелограмма M_1N_1 и P_1Q_1. Поскольку пирамида правильная, $MN = PQ$. Следовательно, $M_1N_1 = P_1Q_1$. В параллелограмме $A_1B_1C_1D_1$ высоты, проведённые к смежным сторонам, равны — значит, параллелограмм является ромбом.

Пусть ребро AB наклонено к плоскости Ω под углом α, тогда ребро CD, которое перпендикулярно AB, наклонено под углом $90^\circ - \alpha$. Отсюда $a\cos\alpha = b\sin\alpha$.

Обозначим $\frac{a}{b} = \lambda$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \lambda$, $A_1B_1 = a\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+\lambda^2}}$. Площадь ромба равна $S = A_1B_1 \cdot M_1N_1 = \frac{a}{\sqrt{1+\lambda^2}} \cdot MN$.

Найдём расстояние между скрещивающимися рёбрами правильной треугольной пирамиды как высоту сечения DMC: $MC \cdot H = b \cdot MN$, $\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} = b \cdot MN$, откуда $MN = \frac{a}{2b}\sqrt{3b^2 - a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3 - \lambda^2}$. Тогда $S = \frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{3-\lambda^2}{1+\lambda^2}}$.

Боковая поверхность пирамиды равна $S = \frac{3a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{\lambda}$.

По условию $\frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{3-\lambda^2}{1+\lambda^2}} = 6\sqrt{15}$, $\frac{3a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{\lambda} = 15\sqrt{15}$. Исключим из этих уравнений a, получим $\frac{\lambda\sqrt{3-\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{4-\lambda^2}} = \frac{3}{5}$. После возведения в квадрат и упрощения найдём $\lambda^2 = \frac{3}{2}$. Далее, $a^2 = 60$, $b^2 = 40$.

Объём правильной пирамиды равен $V = \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2} = \frac{60\sqrt{3}}{12}\sqrt{40 - 20} = 10\sqrt{15}$.

Задача 9. Функция f, определённая на действительных числах, принимает действительные значения. Известно, что для любых действительных x и y выполнено равенство $f(x)f(y) = f(3x - y)$. Найдите все такие функции f.

Ответ: $f(x) = 0$ и $f(x) = 1$.

Решение. Подставим $y = 3x - z$, тогда $f(x)f(3x - z) = f(z)$. Если для некоторого x выполнено $f(x) = 0$, тогда получаем, что и для любого z выполнено $f(z) = 0$, т.е. функция постоянная и равна нулю.

Если же функция не принимает значение 0, то подставим $y = 1{,}5x$. Тогда $f(x)f(1{,}5x) = f(1{,}5x)$, после сокращения на $f(1{,}5x) \neq 0$, получаем $f(x) = 1$, т.е. функция постоянная и равна 1.

Задача 10. Последовательность (a_n) удовлетворяет условиям

$$a_0 = 0, \quad a_1 \neq 0, \quad a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n + a_{n+1}} \quad \text{при всех } n \geqslant 0.$$

Какие значения может принимать a_{2023}?

Ответ: только $1012 \cdot 2023 = 2047276$.

Решение. Заметим, что $a_1 = \sqrt{a_1}$, откуда $a_1 = 1$.

Докажем по индукции, что $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$. База ($n = 1$) очевидна. Из формулы в условии следует, что

$$(a_{n+1} - a_n)^2 = a_n + a_{n+1}, \quad \text{т.е} \quad a_{n+1}^2 - (2a_n + 1)a_{n+1} + a_n^2 - a_n = 0.$$

Решая это уравнение относительно a_{n+1}, получим

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1 \pm \sqrt{8a_n + 1}}{2} = \frac{n(n+1) + 1 \pm \sqrt{4n(n+1) + 1}}{2} =$$

$$= \frac{n^2 + n + 1 \pm (2n + 1)}{2}.$$

Так как по условию $a_{n+1} \geqslant a_n$, то

$$a_{n+1} = \frac{n^2 + n + 1 + (2n + 1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Итак, $a_{2023} = \frac{2024 \cdot 2023}{2} = 2047276$.