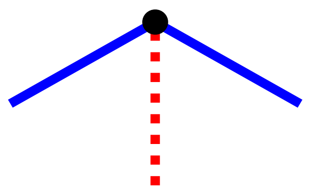
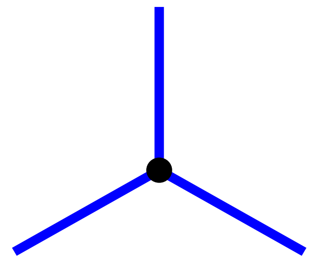
10 класс

Сюжет 1

Вася нашёл кубический граф (все степени вершин равны трём) и нарисовал его на плоскости без самопересечений так, что все рёбра являются отрезками, параллельными прямым ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, причём рёбра, исходящие из одной вершины, параллельны разным прямым. Петя покрасил каждое ребро в красный или синий цвет так, что если три отрезка образуют «клювик», то центральное ребро одного цвета, а крайние другого, а если «треножку», то все цвета одинаковые.





1. Приведите пример получившейся картинки.

Решение. Правильный красный шестиугольник и концентрический правильный синий шестиугольник внутри него. Соответствующие вершины шестиугольников соединены синими отрезками.

2. Покажите, что Васин граф двудольный.

Решение. Не умаляя общности, можно считать, что прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 расположены под углами в $60°$ друг к другу. Посмотрим на какой-то цикл как на N-угольник. При углах в $60°$ или $300°$ стороны разного цвета, при углах $120°$ или $240°$ — одинакового. Отсюда углов по $60°$ или $300°$ четное число. Тогда сумма углов в градусах делится на 120, а $180(N-2)$ делится на 120 только при четных N, то есть нечетных циклов в графе нет.

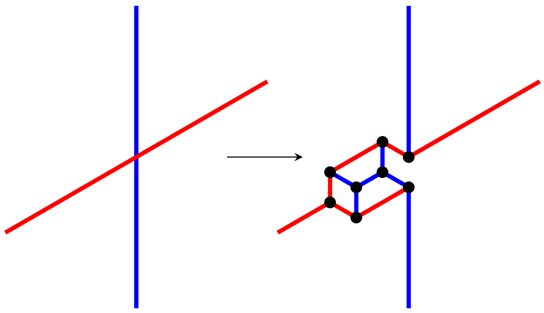
3. Оказалось, что на получившейся картинке нет одноцветных циклов. Покажите, что тогда клювиков больше, чем треножек.

Решение. Пусть в графе n вершин, тогда $3n/2$ ребер, тогда из формулы Эйлера $n/2+2$ граней. Цикл, ограничивающий каждую из граней, не одноцветен, значит, каждая грань содержит уголочек в $60°$, а тогда по крайней мере два таких. Каждый клювик дает два таких уголка. Значит, клювиков не меньше, чем граней, то есть более половины всех вершин.

Также можно обойтись без формулы Эйлера, посчитав суммы степеней вершин во всех красных и синих деревьях.

4. Вася нашёл кубический граф посложнее, и нарисовал его с некоторыми пересечениями ребер. Пете всё равно удалось раскрасить ребра требуемым образом, при этом в его раскраске пересекаются только рёбра разных цветов. Вася накрыл каждое пересечение рублёвой монеткой, под которой не оказалось точек из других рёбер. Докажите, что теперь Вася сможет перерисовать картинку только под монетками так, чтобы она снова удовлетворяла преамбуле (изменив соответствующий граф).

Решение.



Сюжет 2

Дана таблица с n столбцами и N строками. В каждой клетке таблицы стоит либо 0, либо 1. Одинаковых строк нет. Назовем эту таблицу *k-интересной*, если для любых k столбцов выполнено следующее условие: при стирании всех столбцов, кроме данных, среди получившихся строк найдется ровно $2^k - 1$ попарно различных.

1. Приведите пример k-интересной таблицы для произвольных n и $k < n$ (N можете выбирать по желанию).

Решение. Все строки, в которых меньше k единиц, конечно же, дают все варианты, кроме всех единиц, при любом вычёркивании.

2. Докажите, что для любой 2-интересной таблицы выполняется неравенство $n \leqslant 2N - 3$.

Решение. Заметим, что при замене всех значений в одном столбце на противоположные условие задачи никак не меняется, поэтому можно считать, что в каждом столбце не больше половины единиц. Теперь давайте мыслить столбец как подмножество множества строк, состоящее из тех строк, у которых в этом столбце единицы. Тогда условие равносильно тому, что для любых двух множеств A и B ровно три из следующих четырёх множеств непусты: $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{(A \cup B)}$. Отметим, что в силу того, что все множества имеют размер, не превосходящий $\frac{N}{2}$, множество $\overline{(A \cup B)}$ непусто, потому что тогда и пересечение должно быть пустым, а это запрещено. Это означает, что наши условия таковы: все множества размера не больше $\frac{N}{2}$, никакие 2 множества не являются дополнениями друг друга (что важно только для множеств размера ровно $\frac{N}{2}$), и для любых двух множеств они либо не пересекаются, либо вложены одно в другое (ну и, естественно, все множества попарно различны).

Избавимся от условия про то, что размер хотя бы $\frac{N}{2}$, и будем помнить лишь то, что никакие два множества не содержат в объединении все элементы. Докажем по индукции, что $n \leqslant 2N-3$. **База:** $N=3$. Заметим, что никаких множеств, кроме множеств размера 1, быть не может. **Переход.** От $3,\ldots,N-1$ к N. Возьмем набор множеств на $[n]$ и рассмотрим минимальное (по размеру) множество S размера больше 1 (если их несколько, возьмем любое; если такого множества нет, то все множества одноэлементны и $n \leqslant N \leqslant 2N-3$). Заметим, что кроме одноэлементных подмножеств никакие множества не могут различать элементы S. Выкинем все одноэлементные подмножества внутри S (этим мы потеряли не больше, чем $|S|$ множеств), а теперь стянем все элементы S в один элемент. Получим систему множеств, удовлетворяющую условию задачи для $N-|S|+1$ строк, то есть в ней не более, чем $2(N-|S|+1)-3$ множества. Значит, в исходном наборе множеств не более, чем $2N-|S|-1$ множеств, а в силу того, что $|S| \geqslant 2$ получаем то, что хотели.

Отметим, что эта оценка является точной.

3. Докажите, что для любых $n > k \geqslant 3$ существует k-интересная таблица с $N \leqslant 5n^{k-2}$ строками.

Решение. Заметим, что верно неравенство $\sum_{i=0}^{a}\binom{n}{i} \leqslant 2n^a$ при $n > a \geqslant 2$. В самом деле, $\binom{n}{i} \leqslant n^i$, и $\sum_{i=0}^{a} n^i \leqslant 2n^a$.

Рассмотрим следующий набор строк:

- все строки с не более чем $k-2$ единицами (их $\sum_{i=0}^{k-2}\binom{n}{i} \leqslant 2n^{k-2}$);
- все строки, у которых сначала идут единицы, а потом нули (включая строку из всех единиц), таких не больше, чем n;
- для каждого l все строки такие, что на позициях $1,\ldots,l$ суммарно стоит не больше, чем $k-3$ единицы, а на позициях $l+1,\ldots,n$ — только единицы. Таких строк не больше, чем $n\sum_{i=0}^{k-3}\binom{n}{i} \leqslant n \cdot 2n^{k-3} = 2n^{k-2}$, потому что для фиксированного l их не больше, чем $\sum_{i=0}^{k-3}\binom{n}{i}$.

Тогда несложно понять, что эти строки на любом наборе столбцов высекают всё, кроме $1\ldots101$. При этом всего строк не больше, чем $5n^{k-2}$.

4. Зафиксируем некоторые n и k ($n > k$). Найдите максимальное N, для которого существует k-интересная таблица.

Решение. Докажем, что пример из пункта 1 имеет наибольшее N.

Ослабим условие до того, что при стирании любых $n-k$ столбцов получается не более, чем 2^k-1 различных строк. Будем индукцией по k, потом вложенной по n доказывать, что тогда $N \leqslant \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{k-1} =: F(n,k)$.

База: $k=1$. Тогда в каждом столбце написано не более 1 значения, а значит всего не более чем одна строка. **Переход.** Пусть мы доказали для k (и произвольного n). Докажем для $k+1$. Будем делать это индукцией по n. **База:** $n=k$. Тогда строк не больше, чем $2^k-1=\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\cdots+\binom{k}{k-1}$. **Переход.** Пусть для n столбцов строк не больше, чем $F(n,k)$. Пусть столбцов $n+1$. Тогда заметим, что после стирания последнего столбца получается не больше, чем $F(n,k)$ различных строк. Теперь оценим число строк, которые могли получиться дважды после стирания последнего столбца. Сотрем все остальные строки. Заметим, что теперь для любых $k-1$ столбцов из первых n верно, что при стирании всех других из этих n у нас получится не больше, чем $2^{k-1}-1$ различных строк, ведь если получилось 2^{k-1}, то если в исходной таблице оставить эти $k-1$ столбец и еще последний, то получится 2^k различных строк, потому что для каждой из удвоившихся строк в исходной таблице была и такая строка с нулем в последнем столбце, и такая строка с 1 в последнем столбце, так как после стирания последнего столбца таких строк стало 2, а исходно они различные. Тогда удвоившихся строк не больше, чем $F(n, k-1)$ по предположению индукции, а значит всего строк не больше, чем $F(n, k) + F(n, k-1) = F(n+1, k)$, что и требовалось.

Сюжет 3

Будем называть треугольник DEF *вписанным* в треугольник ABC, если точки D, E, F находятся на сторонах BC, AC, AB соответственно.

1. Докажите, что если отрезок EF параллелен отрезку BC, то описанные окружности треугольников AEF и ABD пересекаются на прямой DE.

Решение. Пусть описанная окружность треугольника AEF пересекает отрезок DE в точке K. Тогда $\angle AKE = \angle AFE = \angle ABC$, поэтому точки A, B, D, K лежат на одной окружности.

2. Оказалось, что $CE = DE$, $BF = DF$. Докажите, что точка, симметричная D относительно EF, лежит на пересечении описанных окружностей треугольников ABC и AEF.

Решение. Пусть D' симметрична точке D относительно EF. Тогда $\angle ED'C = \angle EDC = \pi - \angle EDC - \angle EDF = \pi - \angle ABC - \angle ACB = \angle BAC$, поэтому A, E, F, D' лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle AED' = \angle AFD'$. Заметим,что $\angle BD'F = \angle CD'E$ так, как $ED' = EC$ и $FD' = FB$, поэтому точки A, B, C, D' также лежат на одной окружности.

3. Пусть $\angle BAC = \angle DEF = \angle DFE$. Средняя линия треугольника DEF, параллельная EF, пересекает AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что точки A, D, X, Y лежат на одной окружности.

Решение. Из условия на равенство углов следует, что описанная окружность треугольника AEF касается прямых DE, DF. Следовательно, средняя линия треугольника DEF, которая параллельна EF, является радикальной осью описанной окружности треугольника AEF и окружности с центром в точке P и нулевым радиусом, поэтому $XP^2 = XA \cdot XC$ и $YP^2 = YA \cdot YE$. Следовательно, $\angle XDF = \angle XAD$ и $\angle YDE = \angle YAD$, то есть $\angle A = \angle XDF + \angle YDE$, но так как $\angle EDF = \pi - 2\angle A$ мы получаем вписанность четырёхугольника $AXYD$.

4. В треугольник DEF вписан треугольник XYZ, гомотетичный треугольнику ABC. Докажите, что описанная окружность треугольника DEF касается описанной окружности ABC тогда и только тогда, когда касается описанной окружности XYZ.

Решение. Окружность (DEF) повторно пересекает стороны BC, AC, AB в точках D', E', F' соответственно. Окружность (XYZ) повторно пересекает стороны EF, DF, DE в точках X', Y', Z' соответственно. Окружности $(EX'Z')$ и $(FX'Y')$ повторно пересекаются в точке M. Заметим,что $\angle Y'MZ' = \angle DEF + \angle DFE = \pi - \angle EDF$, поэтому M лежит на окружности $(DY'Z')$. Также $\angle EMF = \angle FMX' + \angle EMX' = \angle FY'X' + \angle EZ'X' = \angle FXY +$

$\angle EXZ = \pi - \angle A$, поэтому M лежит на окружности (AEF). Аналогично M лежит на окружностях $(BFD), (CED)$. Пусть ΦЁ — инверсия с центром в точке M и произвольным радиусом. Тогда $\angle \Phi(Y')\Phi(X')\Phi(Z') = \angle M\Phi(X')\Phi(Y') + \angle M\Phi(X')\Phi(Z') = \angle MY'X' + \angle MZ'X' = \angle MFE + \angle MEF = \angle A$. Также $\angle \Phi(X')\Phi(E)\Phi(F) = \angle FMX' = \angle FY'X' = \angle FXY = \angle AFE = \angle AE'F'$. Аналогично $\angle \Phi(X')\Phi(F)\Phi(E) = \angle AF'E'$. Следовательно, треугольники $AE'F'$ и $\Phi(X')\Phi(E)\Phi(F)$ подобны. Проделывая аналогичные рассуждения для двух других сторон, мы получаем $\triangle ABC \cup \triangle D'E'F' \sim \triangle \Phi(X')\Phi(Y')\Phi(Z') \cup \triangle \Phi(D)\Phi(E)\Phi(F)$. Следовательно, угол между окружностями $\Phi((X'Y'Z'))$ и $\Phi((DEF))$ равен углу между окружностями (ABC) и (DEF) по подобию, с другой стороны, он равен углу между окружностями $(X'Y'Z')$ и (DEF), так как инверсия сохраняет углы.