Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
24 сентября 2023 года
10 класс

Решения

1. Квадратный трёхчлен $x^2 - p\,x + q$, где p и q – натуральные числа, имеет два корня. Оказалось, что если q уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.

Решение. По формуле корней квадратного уравнения имеем: $x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4\,q}}{2}$. Следовательно, $x_2 - x_1 = \sqrt{p^2 - 4\,q}$. После уменьшения q на 30% разность корней станет равна $\sqrt{p^2 - 4(\frac{7}{10}\,q)}$. Следовательно, при условии, что $p^2 - 4\,q \geqslant 0$, получаем

$$5\sqrt{p^2 - 4\,q} = \sqrt{p^2 - \tfrac{14}{5}\,q} \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = \frac{81}{20}\,q > 4\,q \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q.$$

По теореме Виета сумма корней квадратного трёхчлена $x^2 - p\,x + q$ равна p. Наименьшее натуральное p, удовлетворяющее равенству $4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q$, это $3^2 = 9$, так как p^2 должно делится на 3^4. Тогда $q = 20$.

Ответ. Наименьшая сумма корней равна 9 у квадратного трёхчлена $x^2 - 9\,x + 20$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

2. Андрей написал в каждой клетке квадрата 4×4 число от 1 до 16 так, что все числа оказались написаны по одному разу. К квадрату подходит Лёня с четырёхклеточной фигурой (см. рис.) в руках. Лёня кладёт свою фигуру в квадрат так, чтобы сумма чисел в этой фигуре была максимально возможной (Лёня может поворачивать свою фигуру). Но Андрей хочет расставить числа так, чтобы сумма чисел в Лёниной фигуре была минимально возможной. Чему она будет равна? 

Ответ. 34.

Оценка. Квадрат 4×4 можно разрезать на четыре непересекающиеся Т-шки. Общая сумма чисел в квадрате равна $\frac{16 \cdot 17}{2} = 136$, а значит, в одной из Т-шек сумма не менее 34.

Пример. Подойдёт, например, такая таблица:

13	5	12	14
9	4	3	6
8	1	2	11
16	10	7	15

Поясним, почему такая таблица подходит. Разобьём клетки на пары: каждой угловой клетке сопоставим в пару ближайшую к ней центральную. Остальные клетки естественным образом разбиваются на четыре двуклеточные домино. В угловых клетках расставлены наибольшие числа, а в парных клетках — числа, дополняющие друг друга до 17.

Если Т-тетрамино занимает одну угловую клетку, то оно занимает две полные пары клеток, и тогда сумма в ней равна 34. Если Т-шка не стоит в углу, то она не содержит 13, 14, 15 и 16. Но и числа 9, 10, 11 и 12 не могут встретиться в одной Т-шке, а тогда максимально возможная сумма в ней равна $12 + 8 + 7 + 6 = 33 < 34$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Она складывается из трёх частей:

Оценка — 3 балла.

Пример без проверки — 2 балла.

Проверка примера — 2 балла.

3. Знайка взял натуральные числа a и b и выписал на первый лист все делители a, а на второй лист — все делители b. Оказалось, что на первом листе выписано 7 чисел, а в совокупности в двух списках Знайка выписал 10 различных чисел. Докажите, что НОД(a, b) — точный квадрат.

Решение. Рассмотрим число a. У него всего 7 делителей. Следовательно, число a является точным квадратом, так как в противном случае делители бы разбились на пары вида $(d, a/d)$ и их было бы чётное количество. Обозначим через $d(n)$ — число различных делителей числа n. Тогда, если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, то

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_m + 1).$$

Так как $d(a) = 7$ — простое число, то у числа a всего один простой делитель p, и, кроме того, $a = p^6$, а на первом листе выписаны числа 1, p, p^2, $\dots$, p^6.

Предположим, что $b = p^k x$, где k — целое и неотрицательное, а x — натуральное и не кратное p. Рассмотрим два случая: $k \leqslant 6$ и $k > 6$.

Пусть $k \leqslant 6$. Тогда к делителям, которые записаны на первом листочке, число b добавит ещё $(k+1)\,d(x)-(k+1)$ новых делителя. Следовательно, $(k+1)\,d(x) - (k+1) = 10 - 7 \Leftrightarrow (k+1)(d(x)-1) = 3 \Leftrightarrow \{k = 2, d(x) = 2\}$ или $\{k = 0, d(x) = 4\} \Rightarrow$ НОД$(a, b) = p^2$ или НОД$(a, b) = p^0$ — это точные квадраты.

Пусть $k > 6$. Тогда к делителям, которые записаны на первом листочке, число b добавит ещё $(k+1)\,d(x) - 7$ новых делителя. Следовательно, $(k+1)\,d(x) - 7 = 10 - 7 \Leftrightarrow (k+1)d(x) = 10 \Leftrightarrow$ (т.к. $k > 6$) $\{k = 9, d(x) = 1\} \Rightarrow$ НОД$(a, b) = p^{\min\{6,9\}} = p^6$ — это точный квадрат.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

4. В турнире по футболу играли несколько команд. Каждые две команды сыграли один матч. За победу давали два очка, за ничью — одно очко, за проигрыш — ничего. После турнира выяснилось чем больше очков у команды, тем меньше голов она забила (суммарно за весь турнир) и тем больше голов пропустила. Какое наименьшее количество команд могло быть?

Решение. В текущей формулировке (в условии задачи пропущено условие, что команды набрали разное количество очков) задача становится тривиальной: подойдёт $k = 2$, и команды сыграли вничью.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая l_1, проходящая через точку A, второй раз пересекла окружность ω_1 в точке C, а ω_2 — в точке D. Через точку B провели прямую l_2, параллельную l_1, которая пересекла ω_1 в точке E. Оказалось, что прямая CE касается ω_2 в точке F. Докажите, что BF — биссектриса $\angle DBE$.

Решение. Пусть $\angle DBF = \alpha$, $\angle FBE = \beta$ (мы хотим доказать, что $\alpha = \beta$), $\angle FAB = \gamma$. Из вписанности $\angle CAF = \alpha$. Тогда $\angle BFE = \gamma$, как угол между хордой и касательной. Из суммы углов треугольника EFB получаем $\angle FEB = 180^\circ - \beta - \gamma$. Так как точки A, B, E и C лежат на одной окружности, то $\angle CAB = \beta + \gamma$, то есть $\angle DAF = \beta$, что и требовалось доказать.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.