11 класс

Сюжет 1

Цель этого сюжета — доказательство следующего утверждения:

Пусть p — нечётное простое число. Докажите, что существует ровно $(p-3)/2$ упорядоченных четвёрок (a, b, c, d) натуральных чисел, для которых $ab+cd = p$ и $\max(c, d) < \min(a, b)$.

Если r — остаток по модулю p, то назовём четвёрку (a, b, c, d), удовлетворяющую условиям выше, r-*четвёркой*, если $c \equiv ra \pmod p$.

1. Докажите, что если r-четвёрка существует, то $r \in \{2, 3, \ldots, p-2\}$.

Решение. Требуется исключить варианты $r = 0, 1, p-1$. Если $r = 0$, то c натуральное кратное p, и тогда $a\,b + c\,d > p$ — противоречие. Если $r = 1$, то $a - c$ кратно p, что противоречит тому, что a, c — различные (т.к. $a > c$) натуральные числа, меньшие p. Если $r = p-1$, то $a + c$ кратно p, откуда (так как $a\,b + c\,d$ кратно p) получаем, что $b - d$ кратно p —такое же противоречие как с a и c при $r = 1$.

2. Докажите, что для данного r существует не более одной r-четвёрки.

Решение. Пусть (a, b, c, d), (a', b', c', d') — две четверки, удовлетворяющие условиям с одним и тем же r. Тогда $a\,c' \equiv a\,r\,a' \equiv c\,a' \pmod p$, аналогично $b\,d' \equiv -r\,d\,d' \equiv b'\,d \pmod p$. То есть $a\,c' - a'\,c$, $b\,d' - b'\,d$ кратны p.

Предположим, что эти разности не равны нулю. Пусть не умаляя общности $a\,c' - a'\,c > 0$, тогда $a\,c' > p > a\,b$, то есть $c' > b$ и тем более $c' > d$. Отсюда получаем, что $|b\,d' - b'\,d| < max(b\,d', b'\,d) < max(c'\,d', b'\,c') = b'\,c' < a'\,b' < p$ откуда (т. к. $|b\,d' - b'\,d|$ кратно p) получаем $b\,d' - b'\,d = 0$ — противоречие.

Пусть теперь одна из исходных разностей равна нулю (не умаляя общности $b\,d' - b'\,d$). Отметим, что из равенств $a\,b + c\,d = p = a'\,b' + c'\,d'$ следует взаимная простота b и d, b' и d'. Поэтому из равенства $b\,d' = b'\,d$ следует $b = b'$, $d = d'$, а из него — $(a - a')b = (c' - c)d$. В силу взаимной простоты b, d имеем $a - a' = d\,x$, $c' - c = b\,x$. При $x > 0$ это противоречит условию $c' < b' = b$, при $x < 0$ — условию $c < b$. Значит $x = 0$, $a = a'$, $c = c'$ — четверки полностью совпадают.

3. Докажите, что если r-четвёрка существует, то $(p-r)$-четвёрки не существует.

Решение. Пусть (a, b, c, d), (a', b', c', d') — две четверки, удовлетворяющие условиям с одним с r и с $r' = p - r$ соответственно. Тогда $a\,c' \equiv -a\,r\,a' \equiv -c\,a' \pmod p$, аналогично $b\,d' \equiv -r\,d\,d' \equiv\!= -b'\,d \pmod p$. То есть $a\,c' + a'\,c$, $b\,d' + b'\,d$ кратны p.

Пусть $c' \geqslant b$, а значит $c' > c, d$, тогда, аналогично прошлому пункту, $b\,d' + b'\,d < c'\,d' + b'\,c' < c'\,d' + b'\,a' = p$ — противоречие с делимостью на p. Значит, $c' < b$ и, аналогично $c < b'$, $d' < a$, $d < a'$. Тогда $a'\,c + a\,c' < a\,b + a'\,b' < 2\,p$, поэтому из делимости $a\,c' + a'\,c = p$ и аналогично $b'\,d + b\,d' = p$.

Предположим теперь, не умаляя общности, что a — наибольшее из чисел. Вычитая из $a\,b + c\,d$ равное ему $a\,c' + c\,a'$, получаем $a(b - c') = c(a' - d)$, откуда из взаимной простоты a, c получаем, что $a' - d$ делится на a — противоречие с тем, что $a < a'$, $a' - d > 0$.

4. Докажите, что для всякого $r \in \{2, 3, \ldots, p-2\}$ существует либо r-четвёрка, либо $(p-r)$-четвёрка.

Решение. Рассмотрим на плоскости множество всех векторов (x, y) с целыми координатами x, y такими, что $y \equiv rx \pmod p$ или $y \equiv (p-r)x \pmod p$. Отметим, что это множество вместе с каждым вектором (x, y) содержит также и $(\pm x, \pm y)$. Рассмотрим в нашем множестве вектор с минимальной суммой координат. В силу замечания выше можно считать, что это вектор $u := (a, c)$, где $a, c > 0, a \neq c$ (на осях координат и на биссектрисах углов между ними такой вектор лежать не может, поскольку $2 \leqslant r \leqslant p-1$), если $c \equiv (p-r)a \pmod p$, то переобозначим r и $p-r$. Предположим пока что $a > c$. Рассмотрим прямую ℓ с уравнением $xc - ya = p$, будем искать точку $(d, -b)$ на этой прямой такую, что $d > 0, d < a, d < b, c < b$ — тогда четверка (a, b, c, d) и будет искомой. Заметим, что если $(x, y) \in \ell$, то $(x-a, y-c) \in \ell$.

Прямая ℓ где-то пересекает прямую $y + x = 0$. Пусть точка $(x_0, y_0) \in \ell$ с целыми (x_0, y_0) лежит выше прямой $y + x = 0$, а точка $v_0 := (x_0 - a, y_0 - c)$ — (нестрого) ниже (то есть $x_0 + y_0 > 0 \geqslant x_0 + y_0 - a - c$).

Во-первых, проверим, что $x_0 - a > 0$. В самом деле, в противном случае $x_0 \leqslant a$. Из выбора вектора u имеем $a + c \leqslant |x_0 - a| + |y_0 - c| = a - x_0 + |y_0 - c|$. Если $c \geqslant y_0$, то $a - x_0 + |y_0 - c| = a + c - x_0 - y_0 < a + c$ — противоречие. Если же $y_0 > c$, то $p = x_0 c - y_0 a < ac - ac < 0$ — снова противоречие.

Итак, $x_0 - a > 0$. Поскольку $(x_0 - a) + (y_0 - c) \leqslant 0$, имеем $y_0 - c < 0$. Если $y_0 \geqslant 0$, то $0 < x_0 - a \leqslant c - y_0 \leqslant c$ и обе координаты вектора v_0 по модулю не больше чем c — это опять противоречит выбору u. Значит, $y_0 < 0$ и $c - y_0 > c$. Теперь выберем наибольшее целое неотрицательное m, при котором $x_0 - a - ma \geqslant 0$. Ясно, что это неотрицательное значение строго меньше чем a. Тогда вектор $v_0 - mu = (x_0 - a - ma, y_0 - c - mc)$ и есть искомый вектор. Действительно, все нужные неравенства уже установлены, осталось только исключить случай $x_0 - a - ma = 0$, но в таком случае из уравнения прямой ℓ получаем $xc - ya = p$, $-(y_0 - c - mc)a = p$, что невозможно в силу того что $a > c > 0$, $-y_0 + c + mc \geqslant 1 + c + mc \geqslant 2$.

Наконец обратимся к случаю $c > a$. В этом случае обозначим $a' = c, c' = a$ и построим точно так же четверку (a', b', c', d') со всеми нужными свойствами, но такую, что, наоборот $a' \equiv rc' \pmod p$. В этом случае, очевидно, (b', a', d', c') будет $(p-r)$-четверкой, что нам подходит.

Сюжет 2

Дан граф $G = (V, E)$ на n вершинах; сопоставим каждой вершине v переменную x_v Пусть T — множество остовных деревьев графа G (то есть поддеревьев, содержащих все вершины). Рассмотрим *остовный многочлен* от n переменных $x_1, \ldots, x_n$

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{S \in T} \prod_{v \in V} x_v^{\deg_S v - 1}.$$

Назовём связный граф G *хорошим*, если $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ раскладывается на линейные множители (в частности, если P_G — тождественный ноль), иначе *плохим*.

1. Найдите $P_{K_4}(1, 2, 3, 4)$, где K_4 — полный граф на четырёх вершинах.

Решение. Как угодно можно понять, что $P_{K_4} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$, то есть ответ 100.

2. Докажите, что цикл на пяти вершинах является плохим графом.

Решение. Распишем $P_{C_5} = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_1 + x_5x_1x_2$. Поскольку многочлен P_{C_5} линеен по каждой переменной, получаем, что каждая из переменных живет в только в одной из скобок. Тогда переменные вынуждены разбиться на скобки 2-2-1 или 3-1-1, что дает не больше четырех мономчиков, противоречие.

3. Пусть G — хороший граф, U — некое подмножество его вершин. Граф H состоит из всех вершин, лежащих в U, и всех рёбер графа G, соединяющих эти вершины. Докажите, что граф H тоже хороший.

Решение. Давайте сначала заметим, что можно последовательно выкидывать вершины по одной с сохранением связности, если U связно. (Если несвязно, то просто 0 получился и все).

Для этого нужно подвесить за U и поочередно удалять вершины с самого нижнего уровня. Теперь нужно понять, что при удалении только одной вершины v граф остается хорошим. Для этого подставим 0 в x_v. Получим, что все слагаемые, в которые x_v входило в хотя бы первой степени, обнулились, а значит остались в точности те, где v — висячая вершина. А все такие деревья устроен так: выбрано дерево в графе $G \setminus v$, и потом одна из вершин из окрестности v соединена с v. Тогда многочлен после подстановки нуля равен $P_{G\setminus v}(x_1, \dots, x_n) \cdot (\sum_{u\in N(v)} x_u)$. Подстановка нуля сохраняет раскладываемость на множители, значит $P_{G\setminus v}$ тоже раскладываемый, значит при удалении вершины v граф остается хорошим.

4. Назовём *раздвоением вершины* v операцию, добавляющую в граф новую вершину v', соединённую ровно с теми же вершинами, что и v. Докажите, что граф, получающийся из одной вершины операциями добавления висячей вершины, раздвоения вершины с добавлением ребра vv' и раздвоения вершины без добавления ребра vv', является хорошим.

Решение.

Лемма 1 (Лемма о раздвоении без добавления ребра)**.** *Пусть дан граф G на n вершинах. Рассмотрим граф G_1, получаемый из G добавлением вершины v_{n+1} и соединением её со всеми вершинами из $N_G(v_n)$, но не с самой v_n. Тогда*

$$P_{G_1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = P_G(x_1, x_2, \dots, x_n + x_{n+1}) \left(\sum_{v\in N_G(v_n)} x_v \right).$$

Доказательство. Давайте заметим, что любое дерево в графе G устроено следующим образом — на всех вершинах, кроме v_n, берётся некоторый лес, такой, что в каждой компоненте есть хотя бы одна вершина из $N_G(v_n)$, и потом вершина v_n соединяется с ровно одной вершиной из каждой компоненты. Обозначим за L множество всех таких лесов, за $t(K)$ — число компонент связности в лесу K, и назовём $A_1, A_2, \dots, A_t$ пересечения множества $N_G(v)$ с компонентами связности леса K. Тогда из рассуждения выше

$$P_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{K\in L} \left(\prod_{v\in V | v\neq v_n} x_v^{\deg_K(v)-1} \prod_{i=1}^{t(K)} \left(\sum_{v\in A_i} x_v \right) x_n^{t(K)-1} \right).$$

Теперь давайте поймём, как устроены деревья в G_1. Там мы тоже берём лес, который содержит все вершины, кроме v_n, v_{n+1}, и такой, что каждая его компонента содержит хотя бы одну вершину из $N_G(v_n)$, после чего одна из долей соединяется с обеими вершинами из v_n, v_{n+1}, а каждая из остальных $t(K)-1$ долей — с ровно одной из этих вершин. Тогда в тех же обозначениях получается, что

$$P_{G_1}(x_1, x_2, \dots x_{n+1}) =$$

$$= \sum_{K\in L}\left(\prod_{v\in V_1 | v\neq v_n, v_{n+1}} x_v^{\deg_K(v)-1} \sum_{i=1}^{t(K)}\left(\left(\sum_{v\in A_i} x_v\right)^2 \prod_{j=1, j\neq i}^{n}\left(\sum_{v\in A_j} x_v\right)(x_n+x_{n+1})^{t(K)-1}\right)\right) =$$

$$= \sum_{K\in L}\left(\prod_{v\in V_1 | v\neq v_n, v_{n+1}} x_v^{\deg_K(v)-1} \sum_{i=1}^{t(K)}\left(\left(\sum_{v\in A_v} x_v\right) \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{v\in A_j} x_v\right)(x_n+x_{n+1})^{t(K)-1}\right)\right) =$$

$$= \left(\sum_{v\in N_G(v_n)} x_v\right)\cdot \sum_{K\in L}\left(\prod_{v\in V_1 | v\neq v_n, v_{n+1}} x_v^{\deg_K(v)-1} \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{v\in A_j} x_v\right)(x_n+x_{n+1})^{t(K)-1}\right).$$

Теперь очевидно, что второй сомножитель равен $P_G(x_1, x_2, \dots, x_n + x_{n+1})$, и лемма доказана. $\square$

Лемма 2 (Лемма о раздвоении с добавлением ребра). *Пусть дан граф G, $|G| = n$. Рассмотрим граф G_2, получаемый из G добавлением вершины v_{n+1} и соединением её со всеми вершинами из $N_G(v_n)$, а также с самой v_n. Тогда*

$$P_{G_2}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = P_G(x_1, x_2, \dots, x_n + x_{n+1})\left(\sum_{v\in N_G(v_n)} x_v + x_n + x_{n+1}\right).$$

Доказательство. Пусть G_1 — граф из леммы 1. Мы в лемме 1 уже выяснили как устроены деревья в графе G, поэтому нужно разобраться с тем, как они устроены в G_2. Заметим, что они устроены так: мы снова берем лес с такими же условиями, а дальше делаем одно из двух — либо не проводим ребро между v_n и v_{n+1}, и это слагаемое такое же как в G_1, либо проводим, и тогда каждую из долей соединяем с ровно одной из этих вершин. Стало быть, сумма всех первых слагаемых даст нам P_{G_1}, а сумма вторых равна

$$\sum_{K\in L}\left(\prod_{v\in V_2 | v\neq v_n, v_{n+1}} x_v^{\deg_K(v)-1} \prod_{i=1}^{t(K)}\left(\sum_{v\in A_i} x_v\right)(x_n+x_{n+1})^{t(K)}\right) = (x_n+x_{n+1})P_G(x_1, x_2, \dots, x_n+x_{n+1}).$$

Тогда получается, что

$$P_{G_2}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = P_{G_1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) + (x_n+x_{n+1})P_G(x_1, x_2, \dots, x_n + x_{n+1}) =$$

$$= P_G(x_1, x_2, \dots, x_n + x_{n+1})\left(\sum_{v\in N_G(v_n)} x_v + x_n + x_{n+1}\right),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Сюжет 3

Будем называть треугольник DEF *вписанным* в треугольник ABC, если точки D, E, F находятся на сторонах BC, AC, AB соответственно.

1. Докажите, что если отрезок EF параллелен отрезку BC, то описанные окружности треугольников AEF и ABD пересекаются на прямой DE.

Решение. Пусть описанная окружность треугольника AEF пересекает отрезок DE в точке K. Тогда $\angle AKE = \angle AFE = \angle ABC$, поэтому точки A, B, D, K лежат на одной окружности.

2. Оказалось, что $CE = DE$, $BF = DF$. Докажите, что точка, симметричная D относительно EF, лежит на пересечении описанных окружностей треугольников ABC и AEF.

Решение. Пусть D' симметрична точке D относительно EF. Тогда $\angle ED'C = \angle EDC = \pi - \angle EDC - \angle EDF = \pi - \angle ABC - \angle ACB = \angle BAC$, поэтому A, E, F, D' лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle AED' = \angle AFD'$. Заметим,что $\angle BD'F = \angle CD'E$ так, как $ED' = EC$ и $FD' = FB$, поэтому точки A, B, C, D' также лежат на одной окружности.

3. Пусть $\angle BAC = \angle DEF = \angle DFE$. Средняя линия треугольника DEF, параллельная EF, пересекает AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что точки A, D, X, Y лежат на одной окружности.

Решение. Из условия на равенство углов следует, что описанная окружность треугольника AEF касается прямых DE, DF. Следовательно, средняя линия треугольника DEF, которая параллельна EF, является радикальной осью описанной окружности треугольника AEF и окружности с центром в точке P и нулевым радиусом, поэтому $XP^2 = XA \cdot XC$ и $YP^2 = YA \cdot YE$. Следовательно, $\angle XDF = \angle XAD$ и $\angle YDE = \angle YAD$, то есть $\angle A = \angle XDF + \angle YDE$, но так как $\angle EDF = \pi - 2\angle A$ мы получаем вписанность четырёхугольника $AXYD$.

4. В треугольник DEF вписан треугольник XYZ, гомотетичный треугольнику ABC. Докажите, что описанная окружность треугольника DEF касается описанной окружности ABC тогда и только тогда, когда касается описанной окружности XYZ.

Решение. Окружность (DEF) повторно пересекает стороны BC, AC, AB в точках D', E', F' соответственно. Окружность (XYZ) повторно пересекает стороны EF, DF, DE в точках X', Y', Z' соответственно. Окружности $(EX'Z')$ и $(FX'Y')$ повторно пересекаются в точке M. Заметим,что $\angle Y'MZ' = \angle DEF + \angle DFE = \pi - \angle EDF$, поэтому M лежит на окружности $(DY'Z')$. Также $\angle EMF = \angle FMX' + \angle EMX' = \angle FY'X' + \angle EZ'X' = \angle FXY + \angle EXZ = \pi - \angle A$, поэтому M лежит на окружности (AEF). Аналогично M лежит на окружностях $(BFD), (CED)$. Пусть ФЁ — инверсия с центром в точке M и произвольным радиусом. Тогда $\angle\Phi(Y')\Phi(X')\Phi(Z') = \angle M\Phi(X')\Phi(Y') + \angle M\Phi(X')\Phi(Z') = \angle MY'X' + \angle MZ'X' = \angle MFE + \angle MEF = \angle A$. Также $\angle\Phi(X')\Phi(E)\Phi(F) = \angle FMX' = \angle FY'X' = \angle FXY = \angle AFE = \angle AE'F'$. Аналогично $\angle\Phi(X')\Phi(F)\Phi(E) = \angle AF'E'$. Следовательно, треугольники $AE'F'$ и $\Phi(X')\Phi(E)\Phi(F)$ подобны. Проделывая аналогичные рассуждения для двух других сторон, мы получаем $\triangle ABC \cup \triangle D'E'F' \sim \triangle\Phi(X')\Phi(Y')\Phi(Z') \cup \triangle\Phi(D)\Phi(E)\Phi(F)$. Следовательно, угол между окружностями $\Phi((X'Y'Z'))$ и $\Phi((DEF))$ равен углу между окружностями (ABC) и (DEF) по подобию, с другой стороны, он равен углу между окружностями $(X'Y'Z')$ и (DEF), так как инверсия сохраняет углы.