

Решения очного тура

4 класс

1. В три одинаковых ведра налили воду: первое ведро заполнили до половины, во второе налили 2 литра, а в третьем не хватает 10 литров до полного. Если всю воду перелить в первое ведро, то оно заполнится полностью. Сколько литров помещается в одно ведро?

Решение. Перельём воду из второго в третье ведро, тогда в третьем ведре будет не хватать 8 литров. Это в точности содержимое первого ведра, т.е. полведра. Значит, ведро содержит 16 литров.

2. Будем записывать календарные даты в формате ДД.ММ.ГГГГ. Сегодняшняя дата 14.01.2024 — первая в этом году дата, в записи которой каждая цифра использована ровно дважды. А когда была первая в этом веке дата с таким свойством?

Решение. Ответ: 23.11.2003.

xx.xx.2000 не подходит — там уже три нуля (а ещё это последний год XX века, но дети этого могут не знать).

Подойдёт ли нам дата xx.xx.2001? Нули уже использованы, одна единица тоже, поэтому дата будет xx.12.2001, а такого дня нет (день должен записываться одинаковыми цифрами, не меньшими трёх).

Дата в 2002 году должна быть xx.11.2002 (другие месяцы не подойдут), а такого числа нет.

Значит, год должен быть 2003 (такая дата есть), а месяц — не менее чем 11. Единственная подходящая дата в 11 месяце 2003 года — 23.11.2003.

3. В ряд в некотором порядке стоят десять рыцарей и десять лжецов. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них произнёс одну из двух фраз: «Справа от меня чётное число рыцарей» или «Справа от меня нечётное число рыцарей». Какое наибольшее количество фраз одного типа могло быть?

Решение. Ответ: 15.

Оценка. Заметим, что первый, третий, пятый, седьмой и девятый слева рыцари обязательно скажут «нечётное», а пять других рыцарей ответят, что чётное. Значит, ответов одинакового типа не более 15.

Пример. Всех лжецов мы можем поместить между первым и вторым рыцарями, тогда они скажут, что справа чётное число рыцарей.

4. Девятнадцать мальчиков 4Я класса договорились написать девочкам валентинки. Они договорились, что все мальчики напишут одинаковое количество валентинок, а каждый мальчик будет писать валентинки разным девочкам. После того как все валентинки были написаны и отправлены, некоторые мальчики осознали, что сегодня 14 января, а вовсе не 14 февраля, а значит, валентинки отправлять ещё рано. Тогда каждый мальчик, осознавший этот печальный факт, написал каждой девочке, которой он отправлял валентинку, ещё одно письмо: «Извини, это не тебе». В итоге каждая девочка получила три письма (валентинки или «Это не тебе»).

Каких мальчиков больше — осознавших свою ошибку, или остальных?

6. В десятичной записи двух чисел использованы только две различные цифры. Может ли сумма этих чисел записываться десятью различными цифрами?

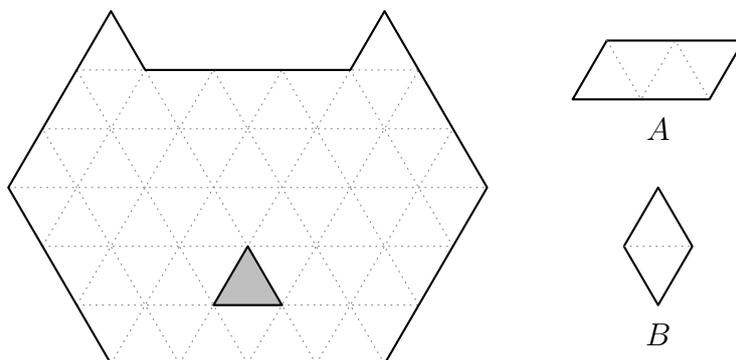
Решение. Не могла.

Обозначим числа из условия через X и Y (пусть $X \geq Y$). Предположим, что в десятичной записи X и Y встречаются только цифры a и b (пусть $a > b$). При сложении чисел X и Y столбиком перенос через десяток может быть или на 1, или его вообще нет. Следовательно, цифрами в числе $X + Y$ могут быть только последние цифры чисел $a + a, a + b, b + b, a + a + 1, a + b + 1, b + b + 1, a, b, a + 1, b + 1$. Последние 4 варианта могут получиться в разрядах, где цифры в Y закончились. Ещё в самом первом разряде могла бы стоять 1, но сейчас мы увидим, что этот случай не реализуется.

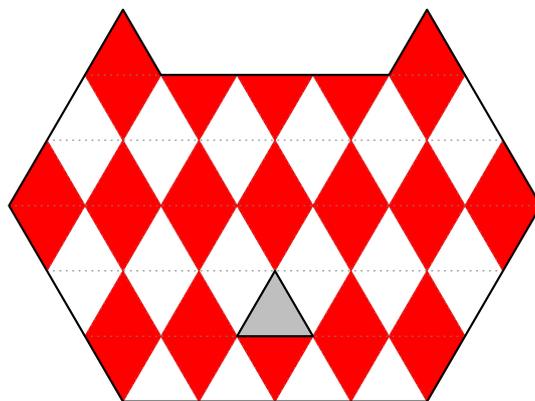
Как мы можем получить четыре варианта $a, b, a + 1, b + 1$ одновременно? Только если цифры Y закончились, и у нас остался перенос разряда, а затем ещё есть перенос и в следующий разряд. Это значит, что $a = 9$. Но тогда последние цифры чисел $a + b + 1$ и b совпадают, и мы приходим к противоречию.

Если в первом разряде суммы стоит 1, то переносов разряда, когда цифры Y закончились, не менее трёх, а тогда в итоговой сумме будет два нуля.

7. Кот Матроскин вырезал из треугольной бумаги несколько фигурок типов A и одну фигурку типа B (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Затем он сложил из них мордочку кота без серого треугольника (это носик кота). Докажите, что фигурка типа B может быть расположена только вертикально (как на рисунке, не повёрнутая).



Решение. Рассмотрим следующую раскраску.



На раскраске 30 клеток закрашено и 28 клеток не тронуты. Причём каждая фигурка типа A в такой раскраске содержит по 2 клетки каждого из цветов. Значит, фигурка типа B будет состоять из двух закрашенных клеток, следовательно, она расположена вертикально.