Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
14 октября 2023 года
4 класс

Решения

1.

Ответ: 4. Решение:
$a \,\Omega\, b = a \cdot b - 3.$
$3 \,\Omega\, x = 3 \cdot x - 3$
$(3 \cdot x - 3) \,\Omega\, 2 = (3 \cdot x - 3) \cdot 2 - 3$
$(3 \cdot x - 3) \cdot 2 - 3 = 15$
$6 \cdot x - 6 - 3 = 15$
$6x = 24$
$x = 4$

Критерии: Правильно преобразовал выражение в уравнение (избавился от омеги) - 2б; Только ответ - 2б; Арифметическая ошибка - 5б.

2. Ответ: 57. Решение: Рассмотрев 3 проекции, можно понять, что фигура состоит из семи кубиков, расположенных определенным образом (см. рис.4). Чтобы минимизировать сумму чисел на видимых гранях, возьмем семь кубиков с наименьшими числами на гранях (то есть кубики 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4). Расставим их следующим образом: чем больше у кубика числа на гранях, тем меньше видимых граней должно быть. Кубик с наибольшими числами на гранях (4) нужно поставить как показано на рис.1 На этой позиции он имеет лишь одну видимую грань. Расставим кубики с числами 3. Наименьшее количество видимых граней будет при расстановке кубиков на две позиции на рис.2 (3 видимые грани) и на позицию на рис.1 (4 видимые грани). Расставим кубики с числами 2 на позиции на рис.2 (4 видимые грани и 5 видимых граней). Оставшийся кубик с числами 1 поставим в позицию на рис.2 (5 видимых граней). Заметим, что Карлсон рассматривает башенку со всех сторон, а не только слева, сверху, сзади и спереди, но поскольку башенка стоит на полу, снизу ее не рассмотреть. Минимальная сумма $4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 57$

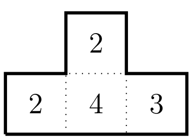


рис. 1

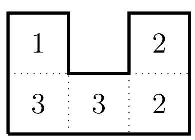


рис. 2

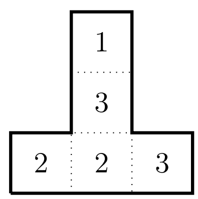


рис. 3

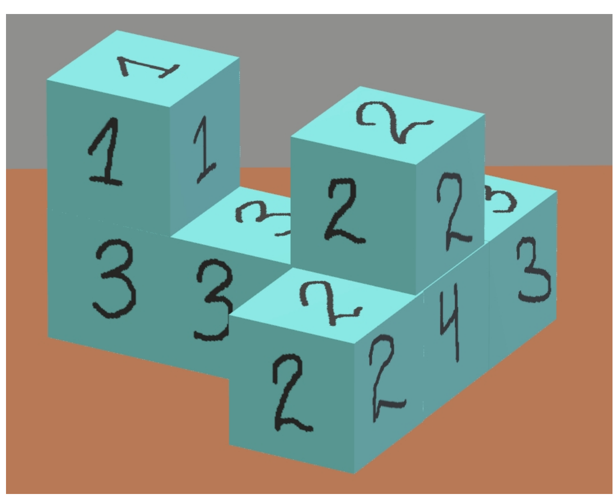


рис. 4

Критерии: Из решения следует, что количество видимых граней должно быть обратно пропорционально величине чисел на гранях - 2б; Верный ответ - 2б; Если 3 и более кубиков поставлены неверно (смотреть по количеству видимых граней) - не более 4б за решение.

3. Приведем возможную последовательность взвешиваний. Используя первые весы, взвесим следующие тройки: $(1,2,3),(4,5,6)...(94,95,96)$. Таким образом мы узнаем суммарный вес первых 96 слитков. Затем взвесим на первых весах слитки $(97,98,99)$, а потом $(98,99,\ 100)$. Если сложить результаты взвешиваний, то получим вес следующих слитков: $1+2+3+...+97+100+(98+99)\cdot 2$. Затем взвесим на вторых весах $(98,99)$ и отнимем полученный вес от общего результата. Получим вес $1+2+3+...+97+100+(98+99)\cdot 2-(98+99)=1+2+...+100$, то есть суммарный вес всех слитков.

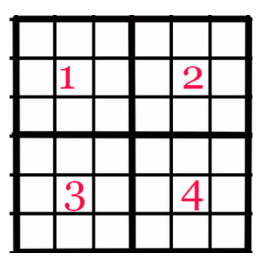
Критерии:

Запутался в последних шагах, не пришел соответственно к ответу - не более 2б.

4. Ответ: $24,39$ Решение: Пусть на доске было записано число A, а первому сказали число B. Так как он смог определить оставшиеся два числа, то A/B однозначно раскладывается на произведение каких-то двух натуральных чисел, значит A/B — простое число.(В противном случае A/B можно было бы разложить на множители уже как минимум двумя разными способами - как произведение множителей составного числа или как произведение 1 и A/B. Значит одному из оставшихся мудрецов сообщили простое число (или единицу), а другому сообщили число 1. Второй сказал, что его число наименьшее из всех, значит 1 точно у него. Третий мудрец сказал, что число первого на 10 больше, чем его число, значит мудрецам сообщили следующие числа: первому - $p+10$, второму - 1, третьему - p. (Заметим, что p не может быть равно 1 так как в этом случае первый мудрец бы знал у кого какие числа, а по условию задачи этого он не знает, значит p - простое). При $p=2$ ответ 24, он подходит, при $p=3$ ответ 39 - он тоже подходит, а при p больше 3 ответы будут $\geq 15\cdot 5\geq 75$, что уже больше 40, следовательно других ответов нет.

Критерии: Потеря случая - не более 5б; Доказан факт, что числа второго и третьего мудрецов - это 1 и простое число - 3б; Только ответы - 1б (Только 1 из ответов - 0б); Не объяснено, почему числа должны быть различны или объяснение опирается только на слова второго мудреца - не более 4б за решение.

5. Ответ: Нет. Решение: Докажем, что нельзя гарантировать, что простреленных клеток будет больше четырех. Разделим доску 6х6 на 4 квадрата 3х3. Заметим, что у каждого из этих квадратов есть «центральная клетка» (всего их 4). Каждая клетка, кроме центральных, является соседней ровно для одной «центральной», следовательно, может так получиться, что все стрелы, которые Леголас выпускал в квадраты $1,2,3$ и 4, будут попадать в их «центральные» клетки. Следовательно, нельзя гарантировать попадание более чем в 4 различные клетки.



Критерии: Только ответ - 0 баллов. Незначительные логические ошибки - 5б; Обозначены 4 «центральные» клетки квадратов, но отсутствует (или неверное) обоснование факта, что при «неудачном» стечении обстоятельств стрелы могут попадать только в них - 2б.