5 класс

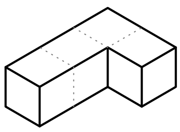
1. Будем записывать календарные даты в формате ДД.ММ.ГГГГ. Сегодняшняя дата 14.01.2024 — первая в этом году дата, в записи которой каждая цифра использована ровно дважды. А когда будет последняя в этом веке дата с таким свойством (век заканчивается в 2100-м году)?

Решение. Ответ: 10.12.2099.

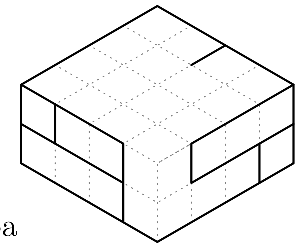
Найдется ли нужная дата в 2100-м году, то есть xx.xx.2100? Нули уже использованы, как и одна единица с двойкой, поэтому месяц должен быть 12-м, а дня xx.12.2100 нет (день должен записываться одинаковыми цифрами, не меньшими трёх).

Значит, год не больше 2099, месяц не больше 12, и среди дней xy.12.2099 находим последний, в котором есть еще один 0 и еще одна 1, то есть 10 декабря.

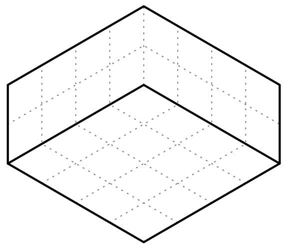
2. У Бори в конструкторе есть детали, склеенные из четырёх кубиков в форме буквы «Г» (см. рисунок). Боря сложил из этих деталей параллелепипед $4 \times 4 \times 2$ и начал изображать его на бумаге в двух проекциях: спереди-сверху и сзади-снизу (так, чтобы были видны все шесть граней), но не закончил. Найдите хотя бы один способ дорисовать все недостающие линии на рисунке Бори.



деталь конструктора

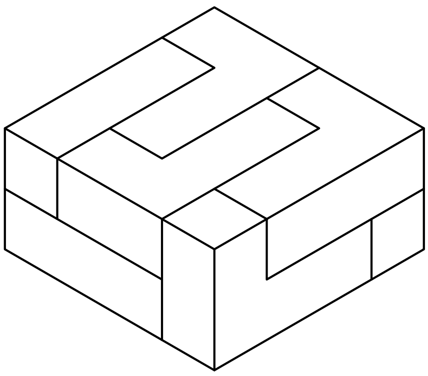


спереди-сверху

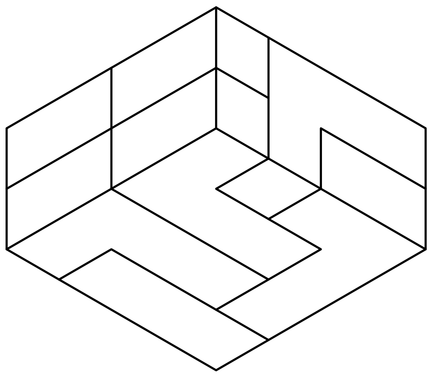


сзади-снизу

Решение.



спереди-сверху



сзади-снизу

Это решение единственно, но требовать доказательства единственности от детей не надо.

3. Муравьи и жуки-носороги собрались на поляне и решили выяснить, кто из них сильнее. Оказалось, что двухсотая часть всех муравьёв смогли поднять всех жуков, а двухсотая часть всех жуков смогли поднять всех муравьёв. При этом один муравей может поднять груз, вес которого в 50 раз превышает вес самого муравья, но не больше. Докажите, что жук-носорог может поднять груз, вес которого в 800 раз превышает вес самого жука-носорога. Предполагается, что все муравьи одинаковы и все жуки-носороги одинаковы.

Решение. Пусть вес всех муравьёв A, вес всех жуков B и один жук может поднять не более x жуков. Тогда двухсотая часть муравьёв может поднять вес $\frac{50}{200}A$. Следовательно, вес всех жуков не превосходит этой величины: $\frac{50}{200}A \geqslant B$. Аналогично, $\frac{x}{200}B \geqslant A$. Поэтому $\frac{50}{200}\frac{x}{200}A \geqslant A$ и $x \geqslant 800$. Значит, максимальная грузоподъёмность одного жука не меньше 800. Поэтому один жук гарантированно сможет поднять 800 жуков.

4. Девятнадцать мальчиков 4Я класса договорились, что напишут девочкам поровну валентинок, а каждый мальчик будет писать валентинки разным девочкам. После того как все валентинки были написаны и отправлены, некоторые мальчики осознали, что сегодня 14 января, а вовсе не 14 февраля, а значит, валентинки отправлять ещё рано. Тогда каждый мальчик, осознавший этот печальный факт, написал каждой девочке, которой он отправлял валентинку, ещё одно письмо: «Извини, это не тебе». В итоге каждая девочка получила три письма (валентинки или «Это не тебе»). Каких мальчиков больше — осознавших свою ошибку или остальных?

Решение. Остальных мальчиков больше. Назовём мальчиков, осознавших ошибку, *внимательными* мальчиками, а остальных — *беспечными* мальчиками.

Будем считать, что каждый мальчик изначально написал только одну валентинку. Если это не так, то «клонируем» каждого мальчика в стольких экземплярах, сколько валентинок он написал, и пусть каждый клон пошлёт ровно одну валентинку. Так как все мальчики писали поровну валентинок, соотношение внимательных и беспечных мальчиков такое клонирование не изменит.

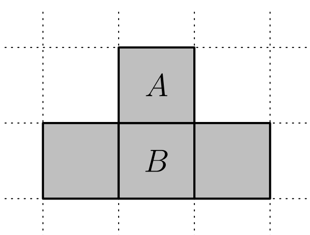
Каждая девочка получила нечётное количество писем, а от внимательного мальчика ей всегда приходит чётное количество писем. Значит, каждой девочке пришло хотя бы одно письмо от беспечного мальчика. Значит, беспечных мальчиков не меньше, чем девочек. С другой стороны, внимательных мальчиков не больше, чем девочек, потому что никакие два внимательных мальчика не могли писать одной и той же девочке (иначе бы с учётом опровержений такая девочка получила бы не менее четырёх писем).

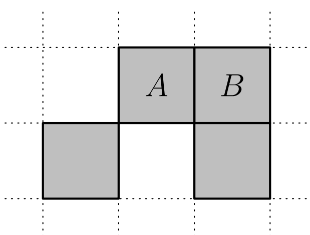
Осталось заметить, что внимательных и беспечных мальчиков не может быть поровну, т.к. всего мальчиков 19.

5. Можно ли закрасить на клетчатом листе несколько клеток так, чтобы у каждой закрашенной клетки был хотя бы один закрашенный сосед по стороне, а среди закрашенных соседей по углу и по стороне соседей по углу было бы вдвое больше?

Решение. Ответ: нельзя.

Из условия следует, что у каждой клетки может быть 2 или 4 соседа по углу. Посмотрим на самую верхнюю закрашенную клетку A (если таких несколько, то выберем любую). Её соседи по углу могут быть только снизу. Следовательно, она имеет двух соседей по углу и одного по стороне. Обозначим соседа по стороне за B. Если B находится снизу от A, то у B уже три соседа по стороне, что невозможно. Если B находится сбоку от A, то у B минимум два соседа по стороне, то есть четыре по углу. Но A и B это самые верхние клетки, противоречие.





6. На доске написано число 2024. Двое по очереди делают ходы. За ход разрешается дописать на доску два (еще не написанных там) различных целых числа от 1 до 4047 включительно, полусумма которых равна одному из уже написанных на доске чисел. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто — начинающий или его противник — сможет выиграть независимо от действий соперника?

Решение. Выиграет первый игрок. Он будет ходить так, чтобы после его хода множество выписанных на доске чисел было бы симметрично относительно числа 2024. Покажем, что первый игрок сможет это сделать.

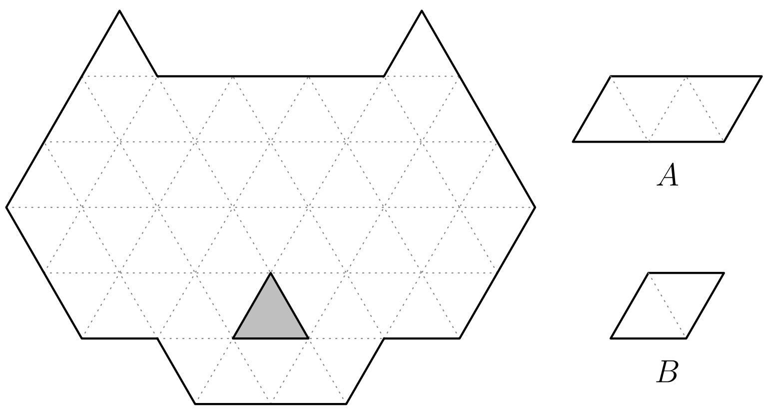
Первым ходом первый игрок выпишет пару $(1, 4047)$; число 2024 уже выписано, $(1 + 4047)/2 = 2024$, значит такой ход легален. Затем будет отвечать на ходы второго игрока следующим образом.

Если второй игрок своим ходом выпишет пару $(a, 4048 - a)$, то первый игрок выпишет пару $(b, 4048 - b)$, где b — любое ещё не выписанное число. Такая пара чисел $(b, 4048 - b)$ существует, так как после хода второго игрока будет выписано чётное число пар чисел, то есть выписаны не все числа, и оба числа из пары не выписаны потому, что множество выписанных чисел симметрично относительно числа 2024.

Если второй игрок выпишет пару (c, d) такую, что $(c+d)/2 = u \neq 2024$, то второй игрок выпишет пару $(4048-c, 4048-d)$. Перед ходом второго игрока множество выписанных чисел симметрично относительно 2024. Поэтому, если число u выписано перед ходом второго игрока, то число $4048 - u = ((4048 - c) + (4048 - d))/2$ тоже выписано, и если числа c и d не были выписаны, то числа $4048 - c$, $4048 - d$ тоже не были выписаны. При этом $4048-c$ не может совпадать с c (в этом случае $c = 2024$, а 2024 уже выписано), и $4048-c$ не может совпадать с d (в этом случае $u = (c + d)/2 = ((4048 - d) + d)/2 = 2024$). Аналогично, $4048 - d \neq d$ и $4048 - d \neq c$.

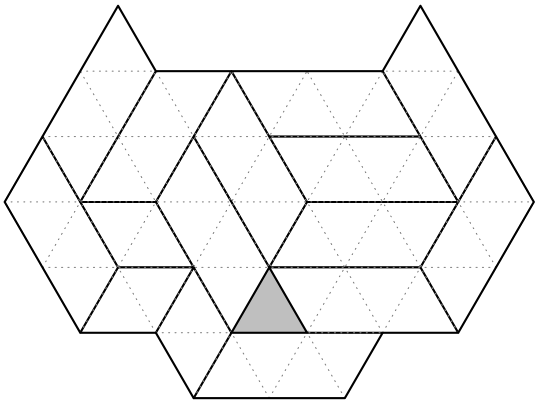
Таким образом, на любой ход второго игрока есть ответный ход первого игрока. Поэтому игра закончится тогда, когда закончатся все числа. Так как всего 2023 пары чисел, то числа закончатся после хода первого игрока. Поэтому победит первый игрок.

7. Кот Матроскин вырезал из треугольной бумаги мордочку кота, из которой он вырезал носик (серый треугольник). Какое наименьшее число фигурок типа B потребуется Матроскину, чтобы разрезать эту мордочку на фигурки типов A и B? Матроскин может поворачивать и переворачивать фигурки.

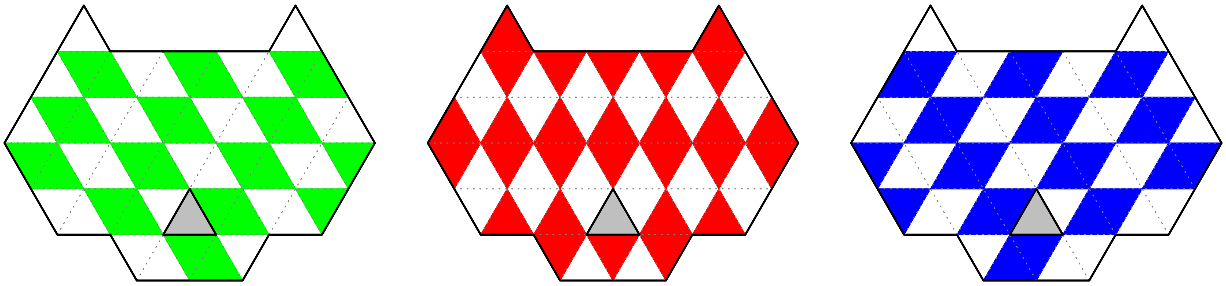


Решение. Ответ: 3.

Пример изображен на рисунке:



Докажем, что меньше трёх фигур типа B получится не может. Рассмотрим три различные раскраски в два цвета, как на рисунке.



На каждой из раскрасок клеток одного цвета 26, другого — 28. Причём фигурка типа A в любой раскраске содержит по 2 клетки каждого из цветов. Следовательно, для каждого из трёх направлений, задаваемых раскрасками существует фигурка типа B. Следовательно, их хотя бы три.