6 класс

1. В ряд в некотором порядке стоят десять рыцарей и десять лжецов. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них произнёс одну из двух фраз: «Справа от меня чётное число рыцарей» или «Справа от меня нечётное число рыцарей». Какое наибольшее количество фраз одного типа могло быть?

Решение. Ответ: 15.

Оценка. Заметим, что первый, третий, пятый, седьмой и девятый слева рыцари обязательно скажут «нечётное», а пять других рыцарей ответят, что чётное. Значит, ответов одинакового типа не более 15.

Пример. Всех лжецов мы можем поместить между первым и вторым рыцарями, тогда они скажут, что справа чётное число рыцарей.

2. Муравьи и жуки-носороги собрались на поляне и решили выяснить, кто из них сильнее. Оказалось, что двухсотая часть всех муравьёв смогли поднять всех жуков, а двухсотая часть всех жуков смогли поднять всех муравьёв. При этом один муравей может поднять груз, вес которого в 50 раз превышает вес самого муравья, но не больше. Докажите, что жук-носорог может поднять груз, вес которого в 800 раз превышает вес самого жука-носорога. Предполагается, что все муравьи одинаковы и все жуки-носороги одинаковы.

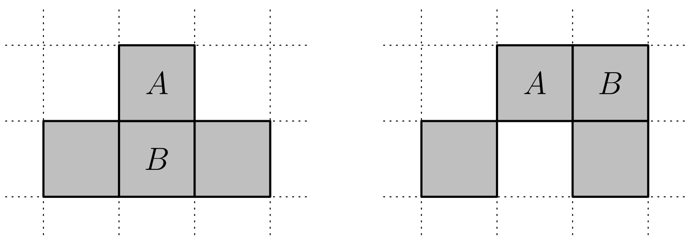
Решение. Пусть вес всех муравьёв A, вес всех жуков B и один жук может поднять не более x жуков. Тогда двухсотая часть муравьёв может поднять вес $\frac{50}{200}A$. Следовательно,

вес всех жуков не превосходит этой величины: $\frac{50}{200}A \geqslant B$. Аналогично, $\frac{x}{200}B \geqslant A$. Поэтому $\frac{50}{200}\frac{x}{200}A \geqslant A$ и $x \geqslant 800$. Значит, максимальная грузоподъёмность одного жука не меньше 800. Поэтому один жук гарантированно сможет поднять 800 жуков.

3. Можно ли закрасить на клетчатом листе несколько клеток так, чтобы у каждой закрашенной клетки был хотя бы один закрашенный сосед по стороне, а среди закрашенных соседей по углу и по стороне соседей по углу было бы вдвое больше?

Решение. Ответ: нельзя.

Из условия следует, что у каждой клетки может быть 2 или 4 соседа по углу. Посмотрим на самую верхнюю закрашенную клетку A (если таких несколько, то выберем любую). Её соседи по углу могут быть только снизу. Следовательно, она имеет два соседа по углу и одного по стороне. Обозначим соседа по стороне за B. Если B находится снизу от A, то у B уже три соседа по стороне, что невозможно. Если B находится сбоку от A, то у B минимум два соседа по стороне, то есть четыре по углу. Но A и B это самые верхние клетки, противоречие.



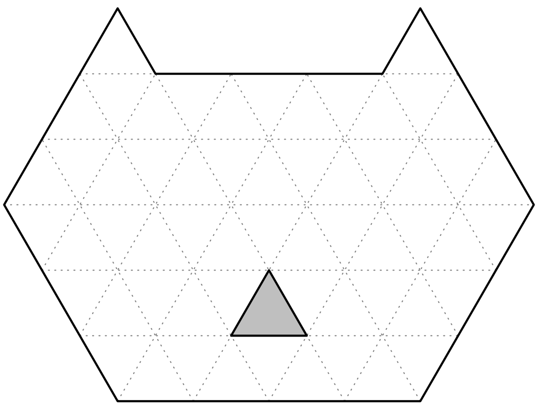
4. На доске написано число 0. За ход разрешается дописать на доску два (ещё не написанных там) различных целых числа от $-N$ до N, сумма которых равна одному из уже написанных на доске чисел. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от N)?

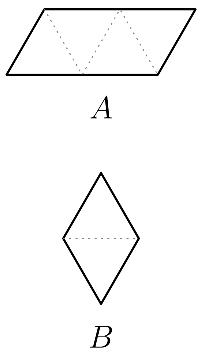
Решение. При нечётном N выиграет первый игрок, при чётном — второй.

Стратегия в обоих случаях будет одинаковая. За выигрышную сторону будем ходить так, чтобы после нашего хода множество выписанных на доске чисел было бы симметрично относительно нуля. То есть если соперник на предыдущем ходу взял пару $(-a, a)$ или же это первый ход в игре, то мы берём пару $(-b, b)$. Если же соперник взял пару $(a, -b)$ $(a \neq b)$, то мы возьмём пару $(-a, b)$. Докажем, что при такой стратегии у обоих игроков всегда будет ход и в итоге все числа от $-N$ до N на доске появятся. Тогда при нечётном N последний ход будет за первым игроком, а при чётном — за вторым (то есть у того игрока, за которого играем).

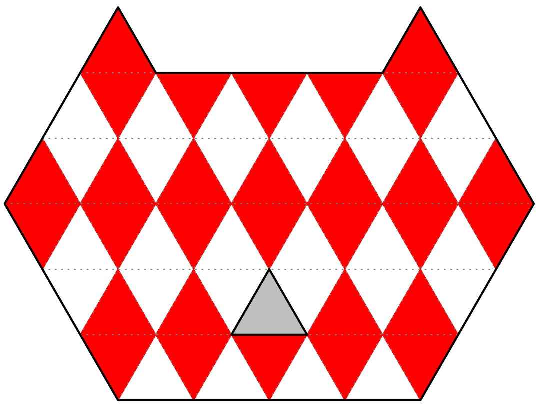
Заметим, что после каждого нашего хода на доске выписаны несколько пар противоположных чисел и 0. Следовательно, если выписаны не все числа, то наш соперник всегда может выписать пару $(-a, a)$, а мы в ответ пару $(-b, b)$. Предположим, что наш соперник соперник выписал пару $(a, -b)$ $(a \neq b)$, где $a - b = c$. Тогда до его хода число c было уже вписано, откуда следует, что выписано и число $-c$. То есть своим ходом мы можем выписать пару чисел $(-a, b)$, так как $-a + b = -c$. То есть при такой стратегии у обоих игроков всегда будет ход, что и требовалось доказать.

5. Кот Матроскин вырезал из треугольной бумаги несколько фигурок типов A и одну фигурку типа B (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Затем он сложил из них мордочку кота без серого треугольника (это носик кота). Докажите, что фигурка типа B может быть расположена только вертикально (как на рисунке, не повёрнутая).





Решение. Рассмотрим следующую раскраску.



На раскраске 30 клеток закрашено и 28 клеток не тронуто. Причём каждая фигурка типа A в такой раскраске содержит по 2 клетки каждого из цветов. Значит, фигурка типа B будет состоять из двух закрашенных клеток, следовательно она расположена вертикально.

6. В десятичной записи двух чисел использованы только две различные цифры. В десятичной записи их суммы все цифры попарно различны. Какова наибольшая возможная такая сумма?

Решение.

Ответ: $829765104 = 828882222 + 882882$.

Обозначим числа из условия через X и Y (пусть $X \geqslant Y$). Предположим, что в десятичной записи X и Y встречаются только цифры a и b (пусть $a > b$), а $X + Y > 829765104$. При сложении чисел X и Y столбиком перенос через десяток может быть или на 1, или его вообще нет. Следовательно, цифрами в числе $X + Y$ могут быть только последние цифры чисел $a + a, a + b, b + b, a + a + 1, a + b + 1, b + b + 1$ (если в этом разряде есть цифры и в X, и в Y), $a, b, a + 1, b + 1, 1$ (если в этом разряде есть цифра только в X). Так как в $X + Y$ хотя бы 9 знаков, а в разрядах, где есть цифры и в X, и в Y есть не более 6 вариантов цифр, то в Y не более 6 цифр, а в X хотя бы 9. Заметим, что среди 7-ой, 8-ой и 9-ой цифр числа $X + Y$ не могут быть три подряд переноса через десяток, так как иначе в этих разрядах в числе X стоят 9, что невозможно. Следовательно, среди цифр $X + Y$, стоящих в разрядах, где закончились цифры Y, могут стоять только числа $a, b, a + 1, b + 1$. Если $a = 9$, то последние цифры чисел $a + b + 1$ и b, а также $a + a + 1$ и a совпадают, откуда следует, что в $X + Y$ не более 8 цифр, что меньше нашего ответа.

Далее считаем, что $8 \geqslant a > b$. Вспомним, что в Y не более шести цифр. Так как $8 \geqslant a > b$, то в $X + Y$ в 7 цифре с конца ещё может произойти переход через разряд (и появится или $a + 1$, или $b + 1$), а в следующих цифрах с конца уже перехода не будет (то есть эти цифры или a или b). Так как в числе $X + Y$ хотя бы 9 знаков, то в $X + Y$ ровно 9 знаков, первые две цифры равны a и b, а третья или $a + 1$ или $b + 1$. Также отсюда следует, что в Y ровно 6 цифр.

Так как $X + Y > 829765104$, а $8 \geqslant a > b$, то $a = 8$, $b \geqslant 2$ и все цифры числа $X + Y$ это последние цифры чисел $a + a, a + b, b + b, a + a + 1, a + b + 1, b + b + 1, a, b$ и одного из чисел $a + 1$ или $b + 1$. То есть это последние цифры чисел $6, 8 + b, 2b, 7, 9 + b, 2b + 1, a, b$ и одного из чисел 9 или $b + 1$. Так как это все различные цифры, а $7 \geqslant b \geqslant 2$, то b может быть равно 5 или 2. В первом случае в числе $X + Y$ в каждом разряде со второго по шестой будет переход через десяток, что невозможно, так как в этом случае две из цифр $a + a$, $a + b$ и $b + b$ отсутствуют. Значит $b = 2$.

Мы поняли, что $X+Y = 82{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}$. Максимальные значения 3-ей, 4-ой, 5-ой и 6-ой цифр это 9, 7, 6 и 5. Так как $X+Y > 829765104$, то $X+Y = 829765{*}{*}{*}$. Пусть $X = 828x_1x_2x_3x_4x_5x_6$, $Y = y_1y_2y_3y_4y_5y_6$. Тогда $\{x_1, y_1\} = \{8, 8\}$, $\{x_2, y_2\} = \{8, 8\}$, $\{x_3, y_3\} = \{2, 2\}$, причём в последней паре был переход через разряд. То есть $\{x_4, y_4\} = \{2, 8\}$. В оставшихся двух разрядах возможен только один вариант: $\{x_5, y_5\} = \{2, 8\}$ и $\{x_6, y_6\} = \{2, 2\}$. То есть $X + Y = 829765104$, противоречие.

7. По кругу написаны натуральные числа от 1 до 15 (именно в таком порядке). За ход разрешается взять два числа x и y, между которыми стоит ровно одно число, и прибавить к x сумму двух соседей числа y, а из y вычесть сумму двух соседей числа x. Можно ли через некоторое количество шагов сделать все числа равными?

Решение. Ответ: нельзя.

Рассмотрим сумму произведений всех пар соседних чисел. Докажем, что она не изменяется. Действительно, пусть в кругу идут числа $\ldots\ a\,x\,b\,y\,c\ \ldots$, и мы прибавляем к x сумму $b+c$, а из y вычитаем $a+b$. Тогда из произведений пар соседних чисел поменялись только ax, xb, by и yc, причём изменились они суммарно на $a\cdot(b+c)+b(b+c)-b(a+b)-c(a+b)=0$.

Предположим, что в конце все числа стали равны t. Так как сумма произведений всех пар соседних чисел не поменялась, то $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+14\cdot15+15\cdot1=15t^2$. Но левая часть при делении на 3 даёт такой же остаток, что и число $1\cdot2+4\cdot5+7\cdot8+10\cdot11+13\cdot14$, которое в свою очередь даёт остаток 1 при делении на 3, так как каждое слагаемое даёт остаток 2. Значит, левая часть равенства не делится на 3, а правая делится, противоречие.