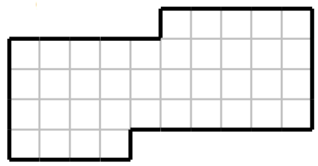
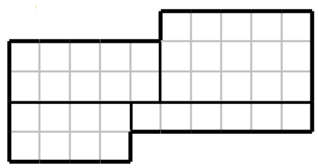
Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
24 сентября 2023 года
6 класс

Решения

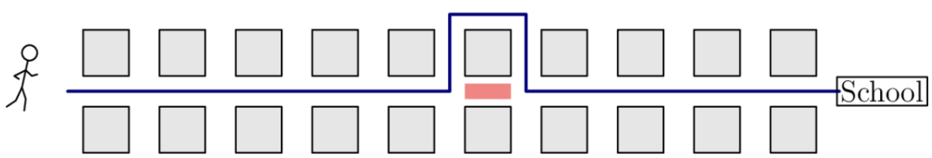
1. Разрежьте данную фигуру по линиям сетки на четыре прямоугольника, площади которых равны 6, 8, 10 и 15.



Решение. Например, так.



2. Серёжа каждый день идёт до школы пешком один километр. Его маршрут состоит из 10 городских кварталов одинаковой длины, каждый квартал Серёжа проходит за 1 минуту. Сегодня, пройдя 5 кварталов, Серёжа обнаружил, что ему придётся сделать крюк, пройдя 3 квартала вместо 1 квартала, чтобы добраться до следующего угла (как показано на рис.). Сколько метров в минуту должен проходить Серёжа на оставшемся пути, чтобы добраться до школы в свое обычное время?



Ответ. 140. **Решение.**Расстояние до школы равно 1 км. Следовательно, один квартал равен 100 метров и Серёжа проходит эти 100 метров за 1 минуту. В обычный день Серёжа проходит 10 кварталов за 10 минут. Из-за изменения маршрута Серёжа прошёл пять кварталов (500 метров) с обычной скоростью и 7 кварталов (700 метров) с ускорением. Пять кварталов Серёжа прошёл за 5 минут. Следовательно, оставшиеся 7 кварталов он тоже должен пройти за 5 минут. Значит, за 5 минут он пройдет 700 метров, а за 1 минуту — 140 метров.

Критерии:

- Неправильный ответ — *0 баллов.*
- Правильный ответ в неверном формате — *Не более 5 баллов.*

3. Петя и Вася играют на клетчатой полоске 1×100, по очереди расставляя в её клетки крестики и нолики (в каждой клетке не более одного символа, первым ходит Петя). За один ход Петя ставит один крестик, а Вася — один нолик. Может ли Вася играть так, чтобы ни в какой момент игры на доске не было три крестика «в ряд».

Ответ. Может. **Решение.**Разобьём полоску 1×100 на доминошки 1×2. На каждый ход Пети в какую-то из доминошек 1×2 Вася будет ставить нолик в другую клетку этой доминошки. Докажем, что ни в какой момент игры на доске не будет три крестика «в ряд». Действительно, среди любых трёх подряд идущих клеток есть выделенная доминошка. Значит, на одной из них будет стоять нолик. Следовательно, при такой игре Васи никогда не будет три крестика «в ряд».

Замечание 1. Также подходит следующая стратегия: будем ставить нолик справа от только что поставленного крестика. Если клетка справа занята, то ставим слева. Если и там занята, то ставим где угодно.

Замечание 2. Стратегия ставить нолик с любой стороны от крестика не работает. Также стратегия ставить нолик с любой стороны, но иногда ставить с другой, когда возникают "плохие конструкции"работает не всегда, так как "плохих конструкций"может быть очень много.

Критерии.

- Приведена верная стратегия без обоснования, что она работает — *2 балла.*
- Приведена неверная стратегия — *0 баллов.*

4. На доску выписаны пятнадцать чисел в порядке возрастания, разница между любыми двумя соседними числами одинакова. Петя не знает выписанных чисел, но знает, что первое число от 1 до 10, второе от 13 до 20, пятнадцатое от 241 до 250. Может ли Петя по имеющимся данным восстановить все числа?

Ответ. Обозначим разницу между соседними числами за d. Если $d \leq 16$, то последнее число не больше $10+16\cdot14=234$ (так как первое число не больше 10). Если $d \geq 18$, то последнее число не меньше $1+18\cdot14=253$ (так как первое число не меньше 1). Так как последнее число от 241 до 250, то оба этих случая невозможны. Следовательно, $d=17$. Так как второе число не больше 20 и оно больше первого на 17, то первое число может быть равно 1, 2 или 3. Если первое число равно 1, то последнее равно $1+14\cdot17=239$. Если первое число равно 2, то последнее равно $2+14\cdot17=240$. И если первое число равно 1, то последнее равно $3+14\cdot17=241$. Подходит только последний вариант. Теперь Петя знает первое число и разницу между соседними числами. Значит, он может восстановить все числа.

Критерии.

- Доказано, что разность между числами равна 17 — *3 балла.*
- Приведён пример такой последовательности — *1 балл.*

5. На столе лежит куча из 533 маркеров. Каждую минуту Серёжа выбирает одну из куч с хотя бы четырьмя маркерами, убирает из неё один маркер и делит её на три новые кучи (не обязательно поровну). Могут ли через несколько минут остаться только кучи с двумя маркерами?

Ответ. Нет. **Решение.**Пусть мы убрали x маркеров. Каждый раз, когда мы убирали маркер, добавлялись две новые кучи. В начале была одна куча. Значит, в конце будет $1+2x$ куч. Предположим, что все оставшиеся кучи содержат два маркера. Следовательно, всего в них будет $2\cdot(1+2x)=4x+2$ маркера. А убрали мы x маркеров. Значит, всего маркеров будет $4x+2+x=5x+2$. Но 533 не представляется в виде $5x+2$, противоречие.

Критерии.

- Замечено, что каждый раз количество кучек увеличивается на 2 — *1 балл.*