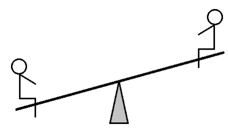
**Олимпиада**
**Юношеской математической школы**
**2 отборочный тур**
**14 октября 2023 года**
**6 класс**

## Решения

**1.** Маша, Серёжа и Денис решили покачаться на качелях (см. рис.). Маша весит 40 кг, а Серёжа — 90 кг. Качели не новые, поэтому они находятся в равновесии, только если вес справа в $x$ раз больше веса слева ($x$ всегда одно и то же). Если Серёжа сядет на качели справа, а Денис слева, то качели будут в равновесии. А если Маша сядет на качели слева, а Денис справа, то качели также будут в равновесии. Чему равен $x$?

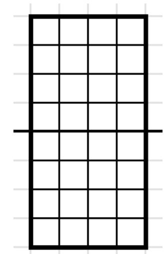


**Ответ.** $x = 1.5$.

**Решение.** Обозначим через $t$ вес Дениса. Из условия следует, что $t$ больше 40 во столько же раз, во сколько 90 больше $t$. Следовательно, $\frac{t}{40} = \frac{90}{t}$, откуда $t^2 = 40 \cdot 90 = 3600$. Следовательно, $t = 60$, а $x = \frac{60}{40} = 1.5$.

**Критерии:**
- Правильный ответ без обоснования — *1 балл.*
- Правильный ответ с примером — *7 баллов.*
- В качестве ответа дан вес Дениса, а не $x$ — *5 баллов.*

**2.** Ирина раскрасила каждую клетку прямоугольника $4 \times 8$ (см. рис.) в серый, бурый или малиновый цвета так, что в верхней и нижней половинах прямоугольника по 3 серых, по 5 бурых и по 8 малиновых клеток. После этого Ирина согнула прямоугольник пополам по линии, как на рисунке. В итоге все клетки разбились на 16 пар. Две из этих пар состоят из двух серых клеток, три — из двух бурых, две — из серой и малиновой. А сколько пар состоят из двух малиновых клеток?



**Ответ.** 5.

**Решение.** По условию есть две пары из двух серых клеток и две из серой и малиновой (в сумме 6 серых клеток). Так как серых клеток всего 6, то пар из серой и бурой клеток нет. Всего у нас 10 бурых клеток, а пар из двух бурых клеток 3. Значит, 4 бурые клетки участвуют в парах из бурой и малиновой клеток (а значит, и 4 малиновые). Также две малиновые клетки участвуют в парах из серой и малиновой. Всего малиновых клеток 16, шесть из которых участвуют в разноцветных парах, а 10 — в одноцветных. Значит, всего есть 5 пар из двух малиновых клеток.

**Критерии:**
- Только пример, как могли совпать цвета — *1 балл.*
- Правильное решение с ответом «10 малиновых клеток» — *5 баллов.*

**3.** Маленький Леголас учится стрелять из лука в квадратную мишень $6 \times 6$ клеток. Леголас целится и стреляет, но каждая стрела может попасть как в задуманную им клетку, так и в любую соседнюю с ней по стороне или углу (в стыки и углы клеток стрелы не попадают, за пределы мишени не летят). Клетка называется «простреленной», если в неё попали хотя бы один раз. Какое наименьшее количество различных клеток может быть прострелено, если Леголас сделал 36 выстрелов, целясь в каждую клетку доски по одному разу?

**Ответ.** 4.

**Решение.** Разделим мишень $6 \times 6$ на 4 квадрата $3 \times 3$. Заметим, что у каждого из этих квадратов есть "центральная клетка", всего их 4. Каждая клетка, кроме центральных является соседней ровно для одной "центральной". Следовательно, может так получиться, что все стрелы будут попадать в "центральные клетки". Меньше четырёх клеток получиться не могло, так как стрелы, выпущенные в угловые клетки квадрата $6 \times 6$, должны попасть в разные клетки.

**Критерии:**
- Только пример — *1 балл.*
- Только оценка — *3 балла.*

**4.** Дед Мороз приехал на остров с 31 жителем. Каждый из них или лжец (всегда лжёт), или рыцарь (всегда говорит правду), или хитрец. Каждый из хитрецов отвечает на первый вопрос на своё усмотрение (лгать или говорить правду), а дальше чередует ложь и правду. Дед Мороз задал каждому три вопроса в таком порядке: 1) «Сэр, Вы рыцарь?» 2) «Сэр, Вы хитрец?» 3) «Сэр, Вы лжец?». На первый вопрос ответ «да» прозвучал 22 раза, на второй — 15 раз, на третий — 9. Сколько на острове хитрецов?

**Ответ.** 18.

**Решение.** Обозначим через $a$ количество рыцарей, через $b$ количество лжецов, а через $c$ и $d$ количество хитрецов, сказавших правду и сказавших ложь на первый вопрос соответственно. Ответы рыцарей будут «Да», «Нет», «Нет». Ответы лжецов будут «Да», «Да», «Нет». Ответы хитрецов, сказавших правду на первый вопрос будут «Нет», «Нет», «Нет», а ответы хитрецов, сказавших ложь на первый вопрос будут «Да», «Да», «Да». Тогда из условия следует, что $a+b+d=22$, $b+d=15$, $d=9$. Значит, $b=15-9=6$, $a=22-9-6=7$. Тогда рыцарей 7, лжецов 6, а хитрецов $31-6-7=18$.

**Критерии:**

Пусть «особые» хитрецы — это хитрецы, ответившие «да» на первый вопро.

• Доказано, что на последний вопрос отвечали только особые хитрецы и их 9 — *1 балл.*

• Доказано, что на второй вопрос отвечают только лжецы и особые хитрецы, и что лжецов 6 — *2 балла.*

• Только ответ или пример — *1 балл.* Данный критерий не суммируется с предыдущими.

**5.** С числом разрешается проделывать две операции — умножать на 2 или вычитать 1. При этом запрещается получать числа, в десятичной записи которых есть цифра 5. Вначале записано число 1. Может ли после некоторого количества операций получиться число, большее 100000?

**Ответ.** Нет.

**Решение.** Предположим, что мы получили число, большее 100000. Тогда в какой-то момент мы получили число от 30000 до 59999 (перескочить через этот промежуток мы не могли). Числа от 50000 до 59999 запрещены. Значит, мы получили какое-то число от 30000 до 49999. Тогда до этого число было от 15000 до 24999. Числа от 15000 до 15999 запрещены. Значит, было число от 16000 до 24999. Значит, до этого было число от 8000 до 12499, а до этого от 4000 до 6249. Числа от 5000 до 5999 запрещены. Следовательно, было число или от 4000 до 4999, или от 6000 до 6249.

В первом случае на предыдущем шаге было число от 2000 до 2499, а до этого от 1000 до 1249, а до этого от 500 до 624. Числа от 500 до 599 запрещены, значит, оно было от 600 до 624. Тогда до этого оно было от 300 до 312, а до этого от 150 до 156, что невозможно.

Во втором случае на предыдущем шаге было число от 3000 до 3124, а до этого от 1500 до 1562, что тоже невозможно.