7 класс

1. Вася написал на доске трёхзначное число. Петя заметил, что у этого числа одинаковые остатки от деления на 8 и 15. А Маша заметила, что его последняя цифра равна сумме первых двух. Какое число мог написать Вася? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)

Решение. Ответ: $123, 246, 606$.

Решение: Обозначим Васино число за $\overline{abc}$, а его остаток от деления на 8 и 15 за r. Тогда $\overline{abc} = 15q_1 + r = 8q_2 + r$. Числа 8 и 15 взаимно просты, значит, $\overline{abc} - r \vdots 120$.
Тогда $\overline{abc} - r$ равно одному из чисел: 120, 240, 360, 480, 600, 720, 840, 960. Далее числа уже более чем трёхзначные. Число r — остаток от деления на 8. То есть $r < 8$ и является последней цифрой числа: $r = c$. Тогда, складывая первые цифры чисел 120, 240, 360, 480, 600, 720, 840, 960 находим $\overline{abc}$.

Подходят варианты, в которых $a + b = r < 8$: $123, 246, 606$.

2. Из пяти внешне неразличимых монет две нестандартны — одна фальшивая, которая весит легче настоящей, а вторая — монета-обманщик. Когда такая монета лежит на одной из чаш весов, весы показывают «невозможный» результат — не такой, как если бы на её месте была настоящая монета, и не такой, как если бы вместо неё была фальшивая. Как за три взвешивания определить, какая монета фальшивая и какая — обманщик?

Решение.

Первыми двумя взвешиваниями сравниваем монеты 1 и 2, а также 3 и 4. Если есть монета-обманщик, то с ней нет равенства. Если есть фальшивая, то равенства на весах тоже не будет. При этом в одном из взвешиваний точно участвовала фальшивая монета или монета-обманщик. (То есть двух равенств быть не может.)

Рассмотрим случаи:

1. Если есть равенство, например, 1 и 2 монеты, то это настоящие монеты. Пусть при взвешивании 3 оказалась легче 4. Заметим, что если монеты 3 и 4 обе нестандартные, то 4 может быть только фальшивой. Тогда взвешиваем монеты под номерами 4 и 1. Если равенство, то 4 настоящая и тогда 3 точно фальшивая, а 5 монета-обманщик. Если показывает, что меньше весит настоящая, то 4 — монета-обманщик и 5 фальшивая. Если наоборот настоящая тяжелее, то 4 фальшивая, а 3 монета-обманщик.

2. Если равенства нет, то 5 — настоящая. Тогда сравним ее с первой монетой. Результат этого взвешивания определяет типы монет в паре 1 и 2. И соответственно, типы монет в паре 3 и 4.

3. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC, L — точка на стороне BC. Прямая l, проходящая через L, пересекает отрезок AC в точке Y, а продолжение отрезка AB за точку B — в точке X. Что больше: XY или $BX + CY$?

Решение. Ответ: отрезок XY больше суммы отрезков $BX + CY$.

По условию $AB > AC$, значит, $\angle ACB > \angle ABC$. Следовательно, $\angle ABC < 90$ и $\angle CBX > 90$ как смежный $\angle ABC$. Откуда $LX > BX$.

Угол ABC внешний для треугольника LBX, значит, $\angle ABC = \angle BLX + \angle BXL$. Тогда $\angle BLX < \angle ABC$. Углы BLX и YLC вертикальные: $\angle BLX = \angle YLC$. Получаем $\angle YLC = \angle BLX < \angle ABC < \angle ACB$. В треугольнике LYC напротив большего угла лежит большая сторона: $LY > CY$.

А значит, $BX + CY < LX + LY = XY$.

4. В стране 2023 города, некоторые из них соединены дорогами с двусторонним движением. Правительство хочет закрыть некоторые из дорог на ремонт. Известно, что если закрыть любые две дороги, то из любого города можно проехать в любой другой. Докажите, что можно закрыть какие-то три дороги, выходящие из какого-то одного города, и по-прежнему из него можно будет проехать в любой другой город.

Решение. После удаления любых двух ребер связность графа сохраняется. Значит, степень каждой вершины хотя бы 3. Поскольку в графе нечетное число вершин, все вершины не могут быть степени 3. Тогда есть вершина степени хотя бы 4.

Посмотрим на вершину степени хотя бы 4. Удалим все ребра, выходящие из нее. Если оставшаяся часть — связный граф, то можно удалить любые 3 ребра, выходящие из этой вершины, и граф останется связным. Если граф распался на несколько компонент связности, то в каждую компоненту должно идти не менее трех ребер (иначе при удалении двух ребер, ведущих в эту компоненту, связность нарушается). Удалим по два ребра, ведущие в каждую компоненту. Связность сохранилась, и было удалено хотя бы 4 ребра.

5. Снежная Королева и Мистер Икс играют в игру, выписывая числа на доску по следующим правилам. Первое число каждый выписал произвольным образом, а затем они по очереди выписывают на доску либо сумму, либо разность последнего и предпоследнего из выписанных чисел. Игра заканчивается, когда на доску выписано 2023 числа. Победитель определяется остатком числа $n_{2021} \cdot n_{2023} - n_{2022}^2$ от деления на 3 (n_{2021} — 2021-*е выписанное на доску в ходе игры число.*). Остаток 1 означает победу Снежной Королевы и вечную зиму, остаток 2 — победу Мистера Икс и вечное лето, а остаток 0 — боевую ничью. Кто побеждает при правильной игре, если Королева ходит первой?

Решение. **Ответ:** ничья. Докажем, что Королева и Мистер Икс могут не проиграть. Все рассуждения в задаче проводятся с числами по модулю три. То есть с числами 0, 1 и 2.

Королева: Расписав таблицу для последних трех ходов, заметим, что если на 2021 месте будет число 1 или 2, то Королева сможет не проиграть. Тогда, играя за Королеву, мы будет ставить своим ходом не нулевое число. Это всегда возможно, потому что на любом ходу у нее есть два варианта. Единственный вариант существует только для такой ситуации:

$$a + b \equiv b - a \mod 3 \to a \equiv -a \mod 3 \to a = 0.$$

Мистер ИКС: Давайте мистер ИКС (тоже) будет поддерживать не 0 на своих ходах (то есть просто не будет писать на доску 0, он так может, потому что у него всегда есть выбор). Тогда пусть на 2021 месте Королева написала x, а перед этим был написан $y \neq 0$. Тогда если $x = 0$, то можно просто написать на доску $0 + y = y$, после чего королева напишет неважно что и получится $0 \cdot z - y^2 = -1 = 2$, и мистер ИКС не проиграет. Если же $x \neq 0$, то $x \neq -x$, и при этом остатки $x - y, x, x + y$ попарно различны,а значит один из остатков $x - y$ и $x + y$ равен $-x$. Тогда он должен его и выписать.Тогда королева напишет либо $-x + x = 0$, либо $-x - x = x$. В первом случае значение искомой величины будет $x \cdot 0 - (-x)^2 = -x^2 = -1 = 2$, а во втором — $x \cdot x - (-x)^2 = 0$. В любом случае Мистер ИКС не проиграл.

6. Круг разбит на 400 секторов. В одном из секторов стоит фишка. За один ход её можно переставить в соседний или в противоположный сектор. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы не было двух соседних непосещённых секторов?

Решение. **Ответ:** 299. **Пример:** 1 – 201 – 202 – 203 – 3 – 4 – 5 – 205 – 206 – 207 – ... – 195 – 196 – 197 – 397 – 398 – 399 – 199.

Оценка. Разобьем (удачно) сектора на 50 восьмерок (8-ка — это две диаметрально противоположные четверки подряд идущих секторов) и убедимся, что во всех восьмерках кроме, может быть, одной, закрашено не менее 6, в оставшейся не менее 5. Пусть первый ход-другой, не умаляя общности, выглядит как 1-2 или 1-201-202. Тогда пусть одна из восьмёрок будет 1,2,3,4, 201,202,203,204; дальнейшее разбиение на восьмёрки определяется однозначно.

Отметим, что в каждой 4-ке не менее двух закрашено, причем если закрашено 2 и оба — не конечные пункты маршрута, то это два средних (соединенных ходом). В этом последнем случае легко видеть, что если и в противоположной 4-ке нет концов пути, то вся та четверка закрашена. Отсюда получаем, что в 8-ках, не содержащих концов, закрашено не менее шести секторов. Так же, но чуть внимательней, убеждаемся в том, что и в начальной 8-ке закрашено не менее 6. Если в ней лежит второй конец маршрута, то всё уже хорошо, иначе надо посмотреть на содержащую его другую 8-ку и убедиться, что там закрашено не менее 5.

7. У портного есть 11 одинаковых 10-метровых рулонов ткани и 5 клиентов. Он может резать рулоны на произвольные куски так, чтобы их можно было поровну разделить между клиентами (каждому по 22 метра). Среди всех таких «раскроев» портному надо выбрать тот, в котором размер минимального из получившихся кусков рулона принимает наибольшее возможное значение. Чему равно это значение?

Решение. Будем рассуждать не в метрах, а в долях рулона. Мы должны выдать пятерым по $\frac{11}{5}$, при этом не используя совсем маленьких дробей.

Оптимальный раздел таков: двое получат $\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{17}{30}$, еще двое по $3 \cdot \frac{13}{30} + 2 \cdot \frac{9}{20}$, один получает 4 куска по $\frac{11}{20}$ рулона. (Таким образом, четыре рулона режутся на $\frac{9}{20} + \frac{11}{20}$, шесть на $\frac{13}{30} + \frac{17}{30}$, один строго пополам. Наименьшим куском является $\frac{13}{30}$ рулона, то есть $4\frac{1}{3}$ метра)

Оценка: ни один рулон нельзя делить на три и более частей (иначе размер какой-то будет меньше $\frac{1}{3}$). Если какой-то рулон используется целиком, то его можно, не ухудшив результат, поделить на две равные части. Значит, оптимальное решение — каждый рулон делить на 2 куска, всего 22 куска.

Если кто-то получает три или менее кусков — какой-то из них будет длиннее $\frac{11}{15}$, а значит, обрезок от этого куска будет слишком коротком. Если кому-то достается 6 или более кусков — какой-то кусок будет слишком коротким. Значит, дележ должен быть таким: двое получают по 5 кусков, а трое — по 4 куска.

Из 22 кусков 11 имеют длину, меньше или равную $\frac{1}{2}$. Тем двоим, кто получает по 5 кусков, могут достаться не более 10 из них, то есть как минимум один достанется тому, кто получает 4 куска. Остальные три доставшиеся ему куска в сумме имеют длину не менее $\frac{11}{5} - \frac{1}{2} = \frac{17}{10}$; среди них есть кусок длины не менее $\frac{17}{30}$. Обрезок от этого куска имеет длину не более $\frac{13}{30}$, что и требовалось.