8 класс

1. На диаметре AB построена окружность с центром O. На ней отмечены точки D и C так, что хорда DC пересекает диаметр AB в точке P, а $\angle AOD = 3 \cdot \angle BOC$. Докажите, что $OP > \frac{AB}{4}$.

Решение. Пусть $\angle BOC = \alpha$, тогда $\angle BOD = 180 - 3\alpha$ и $\angle DOC = 180 - 2\alpha$. Значит треугольник DOC — равнобедренный с углом α при основании, а значит, треугольник POC также равнобедренный. По неравенству треугольника

$$2 \cdot PO > OC = R = \frac{AB}{2}.$$

2. На вилле в Лапландии за круглым столом сидели 100 человек: рыцари и шпионы. Рыцари всегда говорят правду и носят одинаковые носки. Шпионы говорят правду друг про друга, а про рыцарей врут, носки у шпионов могут быть какие угодно. У каждого за столом спросили сначала, одинаковые ли носки у соседа слева, а потом — разные ли носки у соседа справа. По одному из вопросов услышали 60 утвердительных ответов. Сколько утвердительных ответов было по второму вопросу?

Решение. Ответ: 40. Давайте рассмотрим ситуацию, когда все — и шпионы, и рыцари — одеты в одноцветные носки. На первый вопрос «нет» ответили шпионы про рыцарей. Все остальные сказали «да». На второй вопрос рыцари и шпионы разделились на такие же группы, только ответы оказались противоположными: шпионы про рыцарей сказали «да», все остальные ответы — «нет».
Теперь осталось разобраться, что количество пар Ш->Р и Р<-Ш одинаково. Заметим, что обе этих величины равны количеству групп шпионов, то есть равны между собой.
Посмотрим, как изменятся ответы, когда один шпион поменяет одинаковые носки на разные. Заметим, что и рыцарь, и шпион скажут про шпиона правду. Значит, на один вопрос ответ «да» изменится на ответ «нет», а на второй — наоборот. Следовательно, количество ответов «нет» на первый вопрос такое же, как и количество ответов «да» на второй.

3. Санта-Клаус проводит «Уникальную Одноразовую Новогоднюю Лотерею». Он один раз выбирает натуральные числа a и b, $a > b$, а затем компьютер автоматически для каждого целого x нумерует числом $\frac{29x+a}{41x+b}$ какой-то из подарков на складе Санты. Может ли Вовочка заранее выбрать для себя какое-то число, которым точно будет пронумерован один из подарков (независимо от изначального выбора a и b)?

Решение. Условие просит существование дроби $\frac{p}{q}$, которая окажется на подарке для какого-то x при любых a, b. Немного преобразуем это условие:

$$\frac{29x + a}{41x + b} = \frac{p}{q}; \qquad x(29q - 41p) = bp - aq.$$

Получается, что если взять $29q - 41p = 1$, то x будет выражен в явном виде. Выражение $29 \cdot 17 - 12 \cdot 41 = 1$ следует из линейного представления НОДа.

Ответ: $\frac{12}{17}$ (что является датой олимпиады). Если же решить диофантово уравнение, то получится, что $p = 12 + 29k$; $q = 17 + 41k$. То есть ближайшие ответы, которые могут получить дети: $-\frac{17}{24}, \frac{41}{58}$.

4. Снежная Королева и Мистер Икс играют в игру, выписывая числа на доску по следующим правилам. Первое число каждый выписал произвольным образом, а затем они по очереди пишут либо сумму, либо разность между последним и предпоследним из выписанных чисел (из последнего вычитается предпоследнее). Игра заканчивается, когда на доску выписаны 2023 числа. Победитель определяется остатком от деления числа $n_{2021} \cdot n_{2023} - n_{2022}^2$ на 3 (n_{2021} — 2021-*е выписанное на доску в ходе игры число.*) Остаток 1 означает победу Снежной Королевы и вечную зиму, 2 — победу Мистера Икса и вечное лето, а 0 — боевую ничью. Каким будет результат при правильной игре, если Королева ходит первой?

Решение. Ответ: ничья. Докажем, что Королева и Мистер Икс могут не проиграть. Все рассуждения в задаче проводятся с числами по модулю три. То есть с числами 0, 1 и 2.

Королева: Расписав таблицу для последних трех ходов, заметим, что если на 2021 месте будет число 1 или 2, то Королева сможет не проиграть. Тогда, играя за Королеву, мы будет ставить своим ходом не нулевое число. Это всегда возможно, потому что на любом ходу у нее есть два варианта. Единственный вариант существует только для такой ситуации:

$$a + b \equiv b - a \mod 3 \to a \equiv -a \mod 3 \to a = 0.$$

Мистер ИКС: Давайте мистер ИКС (тоже) будет поддерживать не 0 на своих ходах (то есть просто не будет писать на доску 0, он так может, потому что у него всегда есть выбор). Тогда пусть на 2021 месте Королева написала x, а перед этим был написан $y \neq 0$. Тогда если $x = 0$, то можно просто написать на доску $0 + y = y$, после чего королева напишет неважно что и получится $0 \cdot z - y^2 = -1 = 2$, и мистер ИКС не проиграет. Если же $x \neq 0$, то $x \neq -x$, и при этом остатки $x - y, x, x + y$ попарно различны,а значит один из остатков $x - y$ и $x + y$ равен $-x$. Тогда он должен его и выписать.Тогда королева напишет либо $-x + x = 0$, либо $-x - x = x$. В первом случае значение искомой величины будет $x \cdot 0 - (-x)^2 = -x^2 = -1 = 2$, а во втором — $x \cdot x - (-x)^2 = 0$. В любом случае Мистер ИКС не проиграл.

5. У портного есть 11 одинаковых десятиметровых рулонов ткани и пять клиентов. Он может резать рулоны на произвольные куски так, чтобы их можно было поровну разделить между клиентами (каждому по 22 метра). Среди всех таких «раскроев» портному надо выбрать тот, в котором размер минимального из получившихся кусков рулона принимает наибольшее возможное значение. Чему равно это значение?

Решение. Будем рассуждать не в метрах, а в долях рулона. Мы должны выдать пятерым по $\frac{11}{5}$, при этом не используя совсем маленьких дробей.

Оптимальный раздел таков: двое получат $\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{17}{30}$, еще двое по $3 \cdot \frac{13}{30} + 2 \cdot \frac{9}{20}$, один получает 4 куска по $\frac{11}{20}$ рулона. (Таким образом, четыре рулона режутся на $\frac{9}{20} + \frac{11}{20}$, шесть на $\frac{13}{30} + \frac{17}{30}$, один строго пополам. Наименьшим куском является $\frac{13}{30}$ рулона, то есть $4\frac{1}{3}$ метра)

Оценка: ни один рулон нельзя делить на три и более частей (иначе размер какой-то будет меньше $\frac{1}{3}$). Если какой-то рулон используется целиком, то его можно, не ухудшив результат, поделить на две равные части. Значит, оптимальное решение — каждый рулон делить на 2 куска, всего 22 куска.

Если кто-то получает три или менее кусков — какой-то из них будет длиннее $\frac{11}{15}$, а значит, обрезок от этого куска будет слишком короток. Если кому-то достается 6 или более кусков — какой-то кусок будет слишком коротким. Значит, дележ должен быть таким: двое получают по 5 кусков, а трое — по 4 куска.

Из 22 кусков 11 имеют длину, меньше или равную $\frac{1}{2}$. Тем двоим, кто получает по 5 кусков, могут достаться не более 10 из них, то есть как минимум один достанется тому, кто получает 4 куска. Остальные три доставшиеся ему куска в сумме имеют длину не менее $\frac{11}{5} - \frac{1}{2} = \frac{17}{10}$; среди них есть кусок длины не менее $\frac{17}{30}$. Обрезок от этого куска имеет длину не более $\frac{13}{30}$, что и требовалось.

6. Дан треугольник ABC. За точку B на луче AB отложен отрезок $BD = AC$. Точка E на плоскости отмечена так, что $\angle BAE = \angle BCA$, $AE = BC$, причём точки E и C лежат в разных полуплоскостях относительно AB. Прямая l проведена через середины отрезков CE и CD. Докажите, что l делит отрезок AB пополам.

Решение.

1. Проведём через C прямую, параллельную DE. Назовём её пересечение с продолжением AD точкой F.

2. Заметим, что $\triangle\ AEC =\triangle\ BCD$. Отсюда следует два важных для дальнейшего решения факта:
   1) $EC = DC$;
   2) $\angle BDC = \angle ECA = \alpha$.

3. Из факта-1 следует, что $\triangle\ EDC$ — равнобедренный. Тогда $\angle CED = \angle EDC = \beta = \angle ECF$.

4. Из комбинации факта-1 и факта-2 следует $\angle DFC = \beta - \alpha = \angle ACF$. Что даёт равнобедренность $\triangle\ AFC$. А значит, $AF = AC = BD$.

5. Теперь заметим, что прямая l, проходящая через середины отрезков CE и CD является средней линией как в треугольнике EDC, так и в FCD, а значит, делит FD и AB пополам.

7. Стая ворон слетелась праздновать Новый год, и каждая принесла с собой по одному куску сыра какого-то конкретного сорта, причём у всех ворон были разные сорта сыра. После этого некоторые пары ворон попробовали друг у друга сыр, при этом свой сыр никакая ворона не пробовала.
Для каждой пары ворон назовём сорт *продегустированным*, если его попробовала ровно одна ворона из этой пары, причём изначально он не принадлежал ни одной из ворон этой пары.
Оказалось, что для всякой пары ворон количество *продегустированных* сортов больше, чем половина от количества всех остальных ворон. Докажите, что ворон в стае нечётное число.

Решение. Изначальная формулировка звучит так: *В компании несколько человек некоторые пары людей дружат. Известно, что для каждой пары людей количество тех, кто дружит ровно с одним из них составляет более половины от числа оставшихся людей. Докажите, что в такой компании нечетное число людей.*

Пойдём от противного. Пусть людей в компании чётное число — $2k + 2$. Пусть A — количество людей, которых знает только один из пары, а B — количество остальных людей. Сделаем двойной подсчёт величины $d = A - B$ для каждой пары. Заметим, что для любой пары $d \geqslant 2$, значит для всего графа $D \geqslant 2 \cdot \binom{2k+2}{2} = (2k + 2) \cdot (2k + 1)$.

С другой стороны, рассмотрим каждого человека в отдельности. Пусть C — люди, с которыми он дружит, а D — все остальные. Тогда для пары вида (c, c) или (d, d) он входит в разность со знаком минус, а для пары (c, d) — со знаком плюс. Тогда для одного человека получается следующая сумма:

$$d \cdot d - \binom{c}{2} - \binom{d}{2} = cd - \frac{c^2 - c}{2} - \frac{d^2 - d}{2} = \frac{c + d}{2} - \frac{(c - d)^2}{2} \leqslant \frac{2k + 1}{2} - \frac{1}{2} = k.$$

Значит, что для всех людей вместе такая разность $D \leqslant (2k + 2) \cdot k$. Противоречие.