Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
24 сентября 2023 года
8 класс

Решения

1. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AC = BC$, $ADC = 90°$, $\angle BAC = \angle ACD$. Докажите, что на отрезке AB можно выбрать точку M так, что $ADCM$ будет прямоугольником.

Решение.

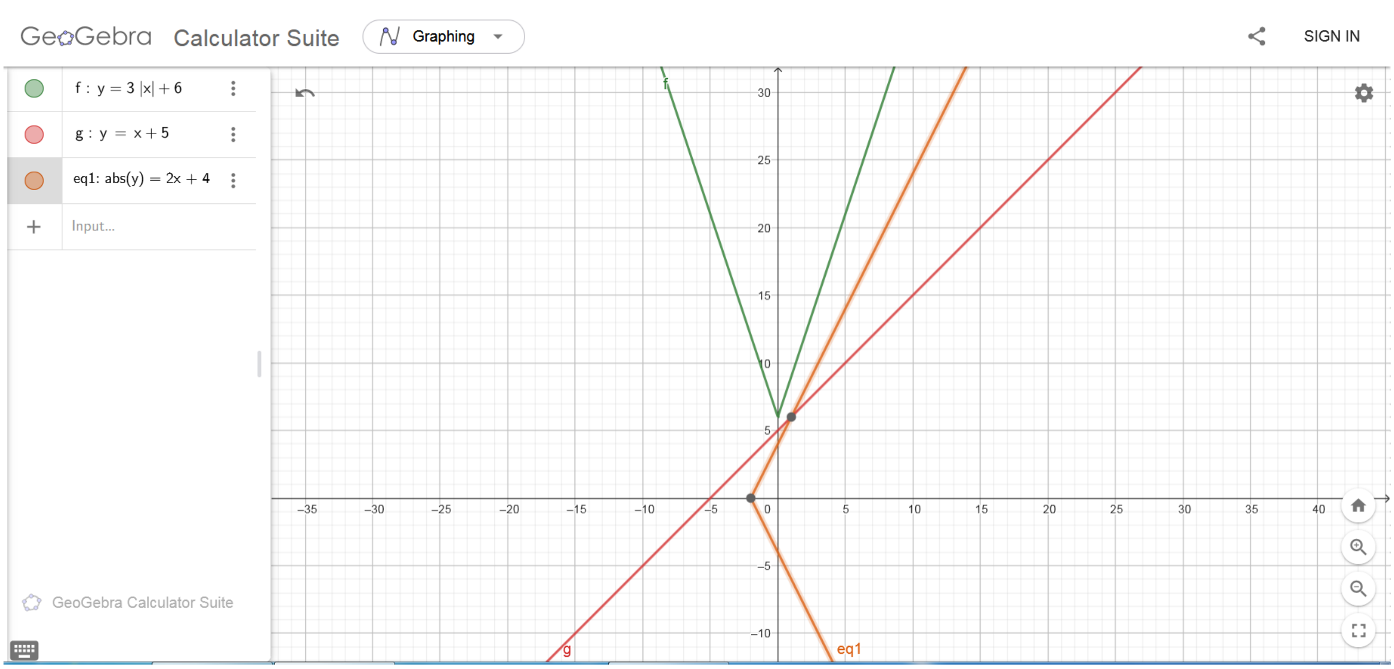
1. Из равенства углов из условия следует, что $BA \parallel CD$.
2. Заметим, что треугольник ABC — равнобедренный, значит угол CBA острый, и основание высоты из вершины C будет на отрезке AB.
3. Назовёт основание высоты точкой M и докажем, что она подходит под необходимые условия.
4. По первому пункту и тому, что $ADC = 90°$ следует, что углы A и C равны $90°$.

Критерии.

1. Построение прямоугольника с неясным положением точки M — 2 балла
2. Не доказано, что высота в треугольнике падает на отрезок AB — штраф в 2 балла

2. Может ли старик Хоттабыч вместо a, b, c, d, e, f вписать в каком-то порядке 6 последовательных натуральных чисел в уравнения $y = a|x| + b$, $y = cx + d$, $|y| = ex + f$ так, чтобы существовала всего одна пара чисел (x, y), которая является решением ровно каких-то двух уравнений и не существовало таких пар (x, y), которые являются решением всех трех уравнений в совокупности?

Решение. Может. Например так. Заметим, что при $x \leq 0$ все три части прямых имеют разные коэффициенты

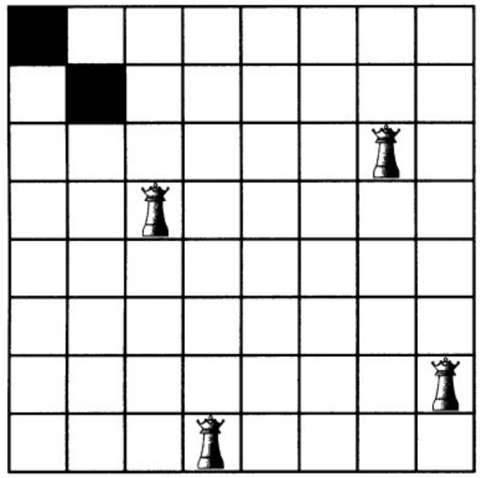


наклона, а значит не будут иметь точек пересечения, кроме одной найденной. При $x < 0$ нетрудно заметить, что у этих кусков прямых никаких общих точек не будет

Критерии. Пример, без обоснования того, что при выборе таких коэффициентах будет необходимое количество пар (x, y), подходящих под условие — 3 балла.

3. На шахматной доске 8×8 Аладдин отметил клетки a8 и b7. Как джинну поставить на доску четырех ферзей на не отмеченные клетки, чтобы они держали под боем все остальные клетки доски, кроме отмеченных?

Решение.



Критерии. Правильный пример — 7 баллов.

4. У взрослой гидры 3600 щупалец. Взрослую гидру можно разделить на две, у каждой должно быть ненулевое количество щупалец. Если гидра не взрослая, то у неё каждую секунду вырастает по щупальцу. У взрослой гидры щупальца не вырастают. Какое наибольшее количество взрослых гидр можно получить из одной взрослой особи за час?

Решение. *Оценка*

1. Заметим, что если мы первым шагом разделили гидру на 1800 и 1800, то больше 4 взрослых гидр мы получить не можем. Существует пример на 13, поэтому давайте говорить про меньший отделённый кусок.

2. Пусть осталось t секунд. Тогда, наименьший размер гидры, которая может вырасти это $3600 - t$.

3. Заметим, что любой отделённый кусок может превратиться только в одну взрослую гидру. Пусть это не так, тогда для получение двух больших кусов необходимо хотя бы $1801 \cdot 2$ секунд.

4. Значит наш единственный успешный путь на каждом шаге отделять минимально возможное число, которое дорастёт. *жадный алгоритм*

5. Ответ: 13 гидр.

Пример

Момент времени	Мелкие части
0	3599, 1
1	3599, 1, 2
2	3598, 2, 2, 3
4	3596, 4, 4, 4, 5
8	3592, 8, 8, 8, 8 , 9
16	3584, 16, 16, 16, 16, 16, 17
32	3568, 32 (6 частей), 33 (1 часть)
64	3536, 64 (7 частей), 65 (1 часть)
128	3472, 128 (8 частей), 129 (1 часть)
256	3344, 256 (9 частей), 257 (1 часть)
512	3088, 512 (10 частей), 513 (1 часть)
1024	2576, 1024 (11 частей), 1025 (1 часть)
2048	1552, 2048 (12 частей), 2049 (1 часть)

Состояния гидр указаны после вырастания и разрубания их на части. Считается, что в момент 0 гидру мы могли разрубить.

Заметим, что действие на шаге 2048 не очень осмысленно. Потому что так у нас дорастет часть с 2048 и взрослых будет 12+1. Или же мы остановимся на шаге 1024 и гидр будет одна, доросшая в этот момент $+\ 11\ +\ 1$ доросших к концу времени.

Критерии. Пример — 2 балла. Оценка — 5 баллов.

5. Знайка взял натуральные числа a и b и выписал на первый лист все делители a, а на второй лист — все делители b. Оказалось, что на первом листе выписано 7 чисел, а в совокупности в двух списках Знайка выписал 10 различных чисел. Докажите, что НОД(a, b) — точный квадрат.

Решение. Рассмотрим число a. У него всего 7 делителей. Следовательно, число a является точным квадратом, так как в противном случае делители бы разбились на пары вида $(d, a/d)$ и их было бы чётное количество. Обозначим через $d(n)$ — число различных делителей числа n. Тогда, если $n = p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, то

$$d(n) = (k_1 + 1)\,(k_2 + 1) \dots (k_m + 1).$$

Так как $d(a) = 7$ — простое число, то у числа a всего один простой делитель p, и, кроме того, $a = p^6$, а на первом листе выписаны числа 1, p, p^2, ..., p^6.

Предположим, что $b = p^k\, x$, где k — целое и неотрицательное, а x — натуральное и не кратное p. Рассмотрим два случая: $k \leqslant 6$ и $k > 6$.

Пусть $k \leqslant 6$. Тогда к делителям, которые записаны на первом листочке, число b добавит ещё $(k+1)\,d(x)-(k+1)$ новых делителя. Следовательно, $(k + 1)\,d(x) - (k + 1) = 10 - 7 \Leftrightarrow (k + 1)(d(x) - 1) = 3 \Leftrightarrow \{k = 2, d(x) = 2\}$ или $\{k = 0, d(x) = 4\} \Rightarrow$ НОД$(a, b) = p^2$ или НОД$(a, b) = p^0$ — это точные квадраты.

Пусть $k > 6$. НОД$(a, b) = p^{\min\{6,k\}} = p^6$ — это точный квадрат.

Критерии.

1. Замечание, что $= p^6$ —- 1 балл.

2. Разбор случая $k > 6$ — ещё 1 балл.