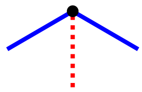
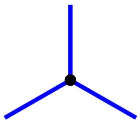
9 класс

Сюжет 1

Вася нашёл кубический граф (все степени вершин равны трём) и нарисовал его на плоскости без самопересечений так, что все рёбра являются отрезками, параллельными прямым ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, причём рёбра, исходящие из одной вершины, параллельны разным прямым. Петя покрасил каждое ребро в красный или синий цвет так, что если три отрезка образуют «клювик», то центральное ребро одного цвета, а крайние другого, а если «треножку», то все цвета одинаковые.

1. Приведите пример получившейся картинки.





Решение. Правильный красный шестиугольник и концентрический правильный синий шестиугольник внутри него. Соответствующие вершины шестиугольников соединены синими отрезками.

2. Покажите, что Васин граф двудольный.

Решение. Не умаляя общности, можно считать, что прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 расположены под углами в 60° друг к другу. Посмотрим на какой-то цикл как на N-угольник. При углах в 60° или 300° стороны разного цвета, при углах 120° или 240° — одинакового. Отсюда углов по 60° или 300° четное число. Тогда сумма углов в градусах делится на 120, а $180(N-2)$ делится на 120 только при четных N, то есть нечетных циклов в графе нет.

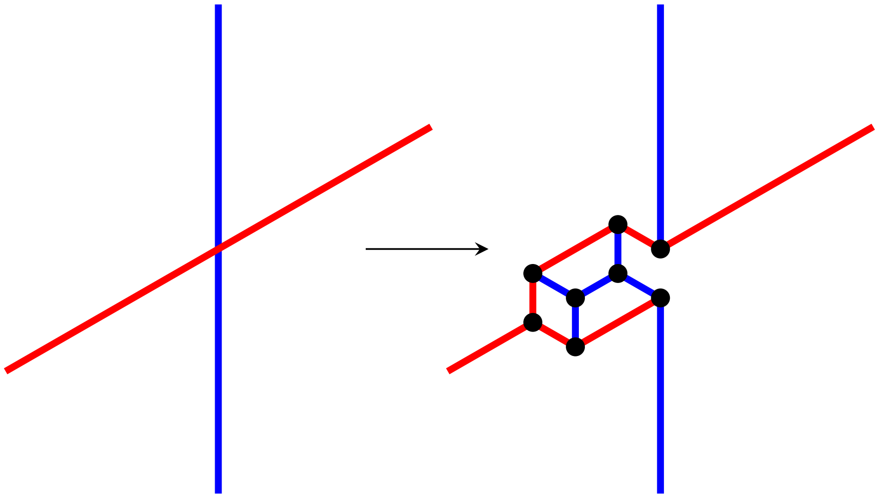
3. Оказалось, что на получившейся картинке нет одноцветных циклов. Покажите, что тогда клювиков больше, чем треножек.

Решение. Пусть в графе n вершин, тогда $3n/2$ ребер, тогда из формулы Эйлера $n/2+2$ граней. Цикл, ограничивающий каждую из граней, не одноцветен, значит, каждая грань содержит уголочек в 60°, а тогда по крайней мере два таких. Каждый клювик дает два таких уголка. Значит, клювиков не меньше, чем граней, то есть более половины всех вершин.

Также можно обойтись без формулы Эйлера, посчитав суммы степеней вершин во всех красных и синих деревьях.

4. Вася нашёл кубический граф посложнее, и нарисовал его с некоторыми пересечениями ребер. Пете всё равно удалось раскрасить ребра требуемым образом, при этом в его раскраске пересекаются только рёбра разных цветов. Вася накрыл каждое пересечение рублёвой монеткой, под которой не оказалось точек из других рёбер. Докажите, что теперь Вася сможет перерисовать картинку только под монетками так, чтобы она снова удовлетворяла преамбуле (изменив соответствующий граф).

Решение.



Сюжет 2

Дана таблица с n столбцами и N строками. В каждой клетке таблицы стоит либо 0, либо 1. Одинаковых строк нет. Назовем эту таблицу k-*интересной*, если для любых k столбцов выполнено следующее условие: при стирании всех столбцов, кроме данных, среди получившихся строк найдется ровно $2^k - 1$ попарно различных.

1. Приведите пример k-интересной таблицы для произвольных n и $k < n$ (N можете выбирать по желанию).

Решение. Все строки, в которых меньше k единиц, конечно же, дают все варианты, кроме всех единиц, при любом вычеркивании.

2. Приведите пример 3-интересной таблицы для произвольного $n > 3$ и $N = 3n - 2$.

Решение. Берём все монотонные последовательности (их $2n$) и все последовательности с одной единицей (их n). Из них 2 раза посчитаны $10\ldots0$ и $0\ldots01$, итого $3n - 2$ строки. Такое описание устойчиво к вычёркиванию, значит, получатся все строки длины 3, кроме 101.

3. Докажите, что для любой 2-интересной таблицы выполняется неравенство $n \leqslant 2N - 3$.

Решение. Заметим, что при замене всех значений в одном столбце на противоположные условие задачи никак не меняется, поэтому можно считать, что в каждом столбце не больше половины единиц. Теперь давайте мыслить столбец как подмножество множества строк, состоящее из тех строк, у которых в этом столбце единицы. Тогда условие равносильно тому, что для любых двух множеств A и B ровно три из следующих четырёх множеств непусты: $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{(A \cup B)}$. Отметим, что в силу того, что все множества имеют размер, не превосходящий $\frac{N}{2}$, множество $\overline{(A \cup B)}$ непусто, потому что тогда и пересечение должно быть пустым, а это запрещено. Это означает, что наши условия таковы: все множества размера не больше $\frac{N}{2}$, никакие 2 множества не являются дополнениями друг друга (что важно только для множеств размера ровно $\frac{N}{2}$), и для любых двух множеств они либо не пересекаются, либо вложены одно в другое (ну и, естественно, все множества попарно различны).

Избавимся от условия про то, что размер хотя бы $\frac{N}{2}$, и будем помнить лишь то, что никакие два множества не содержат в объединении все элементы. Докажем по индукции, что $n \leqslant 2N-3$. **База:** $N=3$. Заметим, что никаких множеств, кроме множеств размера 1, быть не может. **Переход.** От $3,\dots,N-1$ к N. Возьмем набор множеств на $[n]$ и рассмотрим минимальное (по размеру) множество S размера больше 1 (если их несколько, возьмем любое; если такого множества нет, то все множества одноэлементны и $n \leqslant N \leqslant 2N-3$). Заметим, что кроме одноэлементных подмножеств никакие множества не могут различать элементы S. Выкинем все одноэлементные подмножества внутри S (этим мы потеряли не больше, чем $|S|$ множеств), а теперь стянем все элементы S в один элемент. Получим систему множеств, удовлетворяющую условию задачи для $N-|S|+1$ строк, то есть в ней не более, чем $2(N-|S|+1)-3$ множества. Значит, в исходном наборе множеств не более, чем $2N-|S|-1$ множеств, а в силу того, что $|S| \geqslant 2$ получаем то, что хотели.

Отметим, что эта оценка является точной.

4. Зафиксируем некоторые n и k $(n>k)$. Найдите максимальное N, для которого существует k-интересная таблица с N строками.

Решение. Докажем, что пример из пункта 1 имеет наибольшее N.

Ослабим условие до того, что при стирании любых $n-k$ столбцов получается не более, чем 2^k-1 различных строк. Будем индукцией по k, потом вложенной по n доказывать, что тогда $N \leqslant \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{k-1} =: F(n,k)$.

База: $k=1$. Тогда в каждом столбце написано не более 1 значения, а значит всего не более чем одна строка. **Переход.** Пусть мы доказали для k (и произвольного n). Докажем для $k+1$. Будем делать это индукцией по n. **База:** $n=k$. Тогда строк не больше, чем $2^k-1=\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\dots+\binom{k}{k-1}$. **Переход.** Пусть для n столбцов строк не больше, чем $F(n,k)$. Пусть столбцов $n+1$. Тогда заметим, что после стирания последнего столбца получается не больше, чем $F(n,k)$ различных строк. Теперь оценим число строк, которые могли получиться дважды после стирания последнего столбца. Сотрем все остальные строки. Заметим, что теперь для любых $k-1$ столбцов из первых n верно, что при стирании всех других из этих n у нас получится не больше, чем $2^{k-1}-1$ различных строк, ведь если получилось 2^{k-1}, то если в исходной таблице оставить эти $k-1$ столбец и еще последний, то получится 2^k различных строк, потому что для каждой из удвоившихся строк в исходной таблице была и такая строка с нулем в последнем столбце, и такая строка с 1 в последнем столбце, так как после стирания последнего столбца таких строк стало 2, а исходно они различные. Тогда удвоившихся строк не больше, чем $F(n,k-1)$ по предположению индукции, а значит всего строк не больше, чем $F(n,k)+F(n,k-1)=F(n+1,k)$, что и требовалось.

Сюжет 3

Треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к ω в точке A пересекает продолжение стороны BC в точке D. Точки E на стороне AC и F на стороне AB таковы, что $\angle ADF = \angle CDE$.

1. Пусть прямая DF пересекает AC в точке F', DE пересекает AB в точке E'. Докажите, что точки E, E', F, F' лежат на одной окружности.

Решение.

Треугольники DAB и DCA подобны (один угол общий, другая пара равных — это вписанный угол и соответствующий угол между хордой и касательной), отрезки DF и DE соответственные при этом подобии, так что $\angle DEC = \angle DFA = \angle E'FF'$, откуда и следует требуемая вписанность

2. Прямые DE и DF совпали. Докажите, что $BF + CE$ больше четверти периметра ABC.

Решение. Равенство углов из предыдущего пункта превращается здесь в $\angle DFA = \angle DF'C$, то есть равны углы AFF', $AF'F$ и $AF = AF' = AE$. С другой стороны, из того же подобия имеем $AE/EC = BF/FA$, то есть в итоге $EC \cdot BF = AE^2$, откуда по неравенству о средних $EC + BF \geqslant 2AE = AE + AF$. То есть $EC + BF$ составляет больше половины от $AC + BC$, а, по неравенству треугольника, $AC + BC$ больше половины от периметра всего треугольника.

3. Докажите, что все окружности AEF проходят через фиксированную точку помимо A.

Решение. Заметим,что $\triangle ADB \cap F \sim \triangle CDA \cap E$, поэтому $AF \cdot AE = BF \cdot CE$. Пусть S точка внутри треугольника ABC такая,что $\triangle SAB \sim \triangle SCA$. Тогда $\triangle SAB \cap F \sim SCA \cap E$, поэтому $\angle SEA = \angle SFB$, то есть точки A, E, F, S всегда лежат на одной окружности.

4. Прямая EF пересекает окружность ω в точках P и Q. Докажите, что биссектрисы углов EDF и PDQ совпадают.

Решение. Прямая EF пересекает прямые AD, BC в точках X, Y соответственно. Не умаляя общности, будем считать, что Y лежит на луче BC. Описанная окружность треугольника AEF повторно пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке M. Прямая AM пересекает прямую EF в точке T. Заметим,что $\angle MCY = \angle MAF = \angle MEY =>$ точки M, E, C, Y лежат на одной окружности, поэтому $\angle MYE = \angle MCE = 180 - \angle XAM =>$ точки X, Y, A, M лежат на одной окружности. Тогда $TX \cdot TY = TA \cdot TM = TP \cdot TQ = TE \cdot TF$. Заметим,что окружности, описанные около треугольников DEF и DXY, касаются в точке D, так как биссектрисы углов EDF и XDY совпадают. Следовательно, точка T лежит на их радикальной оси, то есть общей касательной в точке D. Тогда $TD^2 = TP \cdot TQ$, поэтому описанная окружность треугольника DPQ также касается прямой TD. Из этого следует, что биссектрисы углов EDF, XDY и PDQ совпадают.