Решения

1. $ABCD$ — трапеция с основанием AD и $\angle BAD + \angle ADC \neq 120°$. Точки A' и B' симметричны точкам A и B относительно прямой CD, а точки C' и D' симметричны точкам C и D относительно прямой AB. Докажите, что $A'B'C'D'$ — трапеция.

Решение. Пусть M — точка пересечения прямых AB и CD. Прямая $C'D'$ симметрична прямой CD относительно прямой AB. Поэтому тогда точка M лежит на прямой $C'D'$. Аналогично, M лежит на прямой $A'B'$. Докажем, что треугольники $A'MD'$ и $B'MC'$ подобны. Во первых, $\angle A'MD' = \angle B'MC' \neq 180°$. Во вторых, из подобия треугольников AMD и BMC следует, что $\frac{AM}{BM} = \frac{DM}{CM}$, но $AM = A'M$, $BM = B'M$, $CM = C'M$, $DM = D'M$. Следовательно, $\frac{A'M}{B'M} = \frac{D'M}{C'M}$ и треугольники $A'MD'$ и $B'MC'$ подобны. Значит, $\angle D'A'M = \angle C'B'M$, откуда вытекает, что $A'D' \parallel B'C'$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Минус 2 балла, если не доказано, что $M \in C'D'$ и $M \in A'B'$.

2. Квадратный трёхчлен $x^2 - p\,x + q$ с натуральными коэффициентами имеет два корня. Оказалось, что если q уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.

Решение. По формуле корней квадратного уравнения имеем: $x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4\,q}}{2}$. Следовательно, $x_2 - x_1 = \sqrt{p^2 - 4\,q}$. После уменьшения q на 30% разность корней станет равна $\sqrt{p^2 - 4(\frac{7}{10}\,q)}$. Следовательно, при условии, что $p^2 - 4\,q \geqslant 0$, получаем

$$5\sqrt{p^2 - 4\,q} = \sqrt{p^2 - \tfrac{14}{5}\,q} \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = \frac{81}{20}\,q > 4\,q \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q.$$

По теореме Виета сумма корней квадратного трёхчлена $x^2 - p\,x + q$ равна p. Наименьшее натуральное p, удовлетворяющее равенству $4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q$, это $3^2 = 9$, так как p^2 должно делится на 3^4. Тогда $q = 20$.

Ответ. Наименьшая сумма корней равна 9 у квадратного трёхчлена $x^2 - 9\,x + 20$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Получено равенство $4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q$ — 2 балла.

3. Знайка взял натуральные числа a и b и выписал на первый лист все делители a, а на второй лист — все делители b. Оказалось, что на первом листе выписано 7 чисел, а в совокупности в двух списках Знайка выписал 10 различных чисел. Докажите, что НОД(a, b) — точный квадрат.

Решение. Рассмотрим число a. У него всего 7 делителей. Следовательно, число a является точным квадратом, так как в противном случае делители бы разбились на пары вида $(d, a/d)$ и их было бы чётное количество. Обозначим через $d(n)$ — число различных делителей числа n. Тогда, если $n = p_1^{k_1}\,p_2^{k_2}\dots p_m^{k_m}$, то

$$d(n) = (k_1 + 1)\,(k_2 + 1)\dots(k_m + 1).$$

Так как $d(a) = 7$ — простое число, то у числа a всего один простой делитель p, и, кроме того, $a = p^6$, а на первом листе выписаны числа 1, p, p^2, …, p^6.

Предположим, что $b = p^k\,x$, где k — целое и неотрицательное, а x — натуральное и не кратное p. Рассмотрим два случая: $k \leqslant 6$ и $k > 6$.

Пусть $k \leqslant 6$. Тогда к делителям, которые записаны на первом листочке, число b добавит ещё $(k+1)\,d(x) - (k+1)$ новых делителя. Следовательно, $(k+1)\,d(x) - (k+1) = 10 - 7 \Leftrightarrow (k+1)(d(x) - 1) = 3 \Leftrightarrow \{k = 2, d(x) = 2\}$ или $\{k = 0, d(x) = 4\} \Rightarrow$ НОД$(a, b) = p^2$ или НОД$(a, b) = p^0$ — это точные квадраты.

Пусть $k > 6$. НОД$(a, b) = p^{\min\{6,k\}} = p^6$ — это точный квадрат.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Минус 2 балла, если не разобран случай $k > 6$. Минус 4 балла, если не разобран случай $k \leqslant 6$.

4. Вычислите

$$\left\lfloor \frac{\lceil\sqrt{1}\rceil}{\lfloor\sqrt{1}\rfloor} + \frac{\lceil\sqrt{2}\rceil}{\lfloor\sqrt{2}\rfloor} + \dots + \frac{\lceil\sqrt{2022}\rceil}{\lfloor\sqrt{2022}\rfloor} + \frac{\lceil\sqrt{2023}\rceil}{\lfloor\sqrt{2023}\rfloor} \right\rfloor.$$

Здесь $\lceil x\rceil$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее x, а $\lfloor x\rfloor$ — наибольшее целое число, не большее x.

Решение. Обозначим

$$S(n) = \frac{\lceil\sqrt{1}\rceil}{\lfloor\sqrt{1}\rfloor} + \frac{\lceil\sqrt{2}\rceil}{\lfloor\sqrt{2}\rfloor} + \dots + \frac{\lceil\sqrt{n}\rceil}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}.$$

Пусть k — некоторое натуральное число. Вычислим:

$$S((k+1)^2) - S(k^2) = \frac{\lceil\sqrt{k^2+1}\rceil}{\lfloor\sqrt{k^2+1}\rfloor} + \dots + \frac{\lceil\sqrt{(k+1)^2-1}\rceil}{\lfloor\sqrt{(k+1)^2-1}\rfloor} + \frac{\lceil\sqrt{(k+1)^2}\rceil}{\lfloor\sqrt{(k+1)^2}\rfloor} = \underbrace{\frac{k+1}{k} + \dots + \frac{k+1}{k}}_{(k+1)^2-k^2-1 \text{ раз}} + \frac{k+1}{k+1} =$$

$$= \frac{k+1}{k}((k+1)^2 - k^2 - 1) + 1 = 2\,k + 3.$$

Следовательно,

$$S(2023) = S(1^2) + S(2^2) - S(1^2) + S(3^2) - S(2^2) + \dots + S(44^2) - S(43^2) + S(2023) - S(44^2) =$$

$$= 1 + (2\cdot 1 + 3) + (2\cdot 2 + 3) + \dots + (2\cdot 43 + 3) + \frac{45}{44}(2023 - 44^2) = 2110\frac{43}{44}.$$

Значит, $\lfloor S(2023)\rfloor = \lfloor 2110\frac{43}{44}\rfloor = 2110$.

Ответ. 2110.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Минус 1 или 2 балла за арифметические ошибки.

5. Есть 10 тарелок, на 9 лежит по 100 блинов, одна пустует. Блины раскрашены в 9 цветов, каждого цвета по 100 блинов. Разрешается снять верхний блин с какой-либо тарелки, и переложить его на верх тарелки, где меньше 100 блинов. Всегда ли такими операциями можно сделать 9 стопок по 100 одноцветных блинов?

Решение. Да, всегда. Докажем такое утверждение: можно положить любой блин из стопки X на любое место в стопке Y, при этом

1) верхний блин из стопки Y станет верхним блином в стопке X (если $X \neq Y$);

2) относительный порядок остальных блинов не поменяется.

Пусть позиции перекладываемого блина и места, куда мы хотим его пихнуть — n-я и m-я сверху. Выберем ещё одну стопку T. Переложим верхний блин из неё на доп тарелку. Переложим $n-1$ блин из X на доп тарелку. Переложим n-й блин из X в T. Переложим все блины с доп тарелки обратно в X (теперь там верхний блин — тот который был верхним у T). Переложим m блинов из Y на доп тарелку. Переложим верхний блин из T в Y. Переложим верхний из X верхний в T. Переложим $m-1$ блин в Y и последний, который был верхним в Y, — в X.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Минус 3 балла, если не доказано, что после того, как нужный блин окажется на верху стопки, относительный порядок остальных блинов не поменяется.

Если предъявлен другой алгоритм, то надо аккуратно следить, что он приведёт к результату (например, если не следить за сохранением порядка блинов, то после перекладывания очередного блина предыдущее построение может испортится).