Условия очного тура

10 класс

Сюжет 1

Вася нашёл кубический граф (все степени вершин равны трём) и нарисовал его на плоскости без самопересечений так, что все рёбра являются отрезками, параллельными прямым ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, причём рёбра, исходящие из одной вершины, параллельны разным прямым. Петя покрасил каждое ребро в красный или синий цвет так, что если три отрезка образуют «клювик», то центральное ребро одного цвета, а крайние другого, а если «треножку», то все цвета одинаковые.

1. Приведите пример получившейся картинки.

2. Покажите, что Васин граф двудольный.

3. Оказалось, что на получившейся картинке нет одноцветных циклов. Покажите, что тогда клювиков больше, чем треножек.

4. Вася нашёл кубический граф посложнее, и нарисовал его с некоторыми пересечениями ребер. Пете всё равно удалось раскрасить ребра требуемым образом, при этом в его раскраске пересекаются только рёбра разных цветов. Вася накрыл каждое пересечение рублёвой монеткой, под которой не оказалось точек из других рёбер. Докажите, что теперь Вася сможет перерисовать картинку только под монетками так, чтобы она снова удовлетворяла преамбуле (изменив соответствующий граф).

Сюжет 2

Дана таблица с n столбцами и N строками. В каждой клетке таблицы стоит либо 0, либо 1. Одинаковых строк нет. Назовем эту таблицу *k-интересной*, если для любых k столбцов выполнено следующее условие: при стирании всех столбцов, кроме данных, среди получившихся строк найдется ровно $2^k - 1$ попарно различных.

1. Приведите пример k-интересной таблицы для произвольных n и $k < n$ (N можете выбирать по желанию).

2. Докажите, что для любой 2-интересной таблицы выполняется неравенство $n \leqslant 2N - 3$.

3. Докажите, что для любых $n > k \geqslant 3$ существует k-интересная таблица с $N \leqslant 5n^{k-2}$ строками.

4. Зафиксируем некоторые n и k $(n > k)$. Найдите максимальное N, для которого существует k-интересная таблица.

Сюжет 3

Будем называть треугольник DEF *вписанным* в треугольник ABC, если точки D, E, F находятся на сторонах BC, AC, AB соответственно.

1. Докажите, что если отрезок EF параллелен отрезку BC, то описанные окружности треугольников AEF и ABD пересекаются на прямой DE.

2. Оказалось, что $CE = DE$, $BF = DF$. Докажите, что точка, симметричная D относительно EF, лежит на пересечении описанных окружностей треугольников ABC и AEF.

3. Пусть $\angle BAC = \angle DEF = \angle DFE$. Средняя линия треугольника DEF, параллельная EF, пересекает AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что точки A, D, X, Y лежат на одной окружности.

4. В треугольник DEF вписан треугольник XYZ, гомотетичный треугольнику ABC. Докажите, что описанная окружность треугольника DEF касается описанной окружности ABC тогда и только тогда, когда касается описанной окружности XYZ.