Условия очного тура

11 класс

Сюжет 1

Цель этого сюжета — доказательство следующего утверждения:

Пусть p — нечётное простое число. Докажите, что существует ровно $(p-3)/2$ упорядоченных четвёрок (a, b, c, d) натуральных чисел, для которых $ab+cd = p$ и $\max(c, d) < \min(a, b)$.

Если r — остаток по модулю p, то назовём четвёрку (a, b, c, d), удовлетворяющую условиям выше, r-*четвёркой*, если $c \equiv ra \pmod{p}$.

1. Докажите, что если r-четвёрка существует, то $r \in \{2, 3, \ldots, p-2\}$.

2. Докажите, что для данного r существует не более одной r-четвёрки.

3. Докажите, что если r-четвёрка существует, то $(p-r)$-четвёрки не существует.

4. Докажите, что для всякого $r \in \{2, 3, \ldots, p-2\}$ существует либо r-четвёрка, либо $(p-r)$-четвёрка.

Сюжет 2

Дан граф $G = (V, E)$ на n вершинах; сопоставим каждой вершине v переменную x_v Пусть T — множество остовных деревьев графа G (то есть поддеревьев, содержащих все вершины). Рассмотрим *остовный многочлен* от n переменных $x_1, \ldots, x_n$

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{S \in T} \prod_{v \in V} x_v^{\deg_S v - 1}.$$

Назовём связный граф G *хорошим*, если $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ раскладывается на линейные множители (в частности, если P_G — тождественный ноль), иначе *плохим*.

1. Найдите $P_{K_4}(1, 2, 3, 4)$, где K_4 — полный граф на четырёх вершинах.

2. Докажите, что цикл на пяти вершинах является плохим графом.

3. Пусть G — хороший граф, U — некое подмножество его вершин. Граф H состоит из всех вершин, лежащих в U, и всех рёбер графа G, соединяющих эти вершины. Докажите, что граф H тоже хороший.

4. Назовём *раздвоением вершины* v операцию, добавляющую в граф новую вершину v', соединённую ровно с теми же вершинами, что и v. Докажите, что граф, получающийся из одной вершины операциями добавления висячей вершины, раздвоения вершины с добавлением ребра vv' и раздвоения вершины без добавления ребра vv', является хорошим.

Сюжет 3

Будем называть треугольник DEF *вписанным* в треугольник ABC, если точки D, E, F находятся на сторонах BC, AC, AB соответственно.

1. Докажите, что если отрезок EF параллелен отрезку BC, то описанные окружности треугольников AEF и ABD пересекаются на прямой DE.

2. Оказалось, что $CE = DE$, $BF = DF$. Докажите, что точка, симметричная D относительно EF, лежит на пересечении описанных окружностей треугольников ABC и AEF.

3. Пусть $\angle BAC = \angle DEF = \angle DFE$. Средняя линия треугольника DEF, параллельная EF, пересекает AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что точки A, D, X, Y лежат на одной окружности.

4. В треугольник DEF вписан треугольник XYZ, гомотетичный треугольнику ABC. Докажите, что описанная окружность треугольника DEF касается описанной окружности ABC тогда и только тогда, когда касается описанной окружности XYZ.