



Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
24 сентября 2023 года
11 класс



1. Квадратный трёхчлен $x^2 - px + q$, где p и q – натуральные числа, имеет два корня. Оказалось, что если q уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.
2. Найдите количество функций $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ для которых верно $f(f(f(x))) = x$ для всех $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Прямая l_1 , проходящая через точку A , второй раз пересекла окружность ω_1 в точке C , а ω_2 – в точке D . Через точку B провели прямую l_2 , параллельную l_1 , которая пересекла ω_1 в точке E . Оказалось, что прямая CE касается ω_2 в точке F . Докажите, что BF – биссектриса $\angle DBE$.
4. Докажите, что для любого $x \in [0, 2]$ верно

$$2^x + 1 - \sqrt{10,5x + 4} \leq 0.$$

5. Сумма всех натуральных делителей числа n более чем в 100 раз превосходит само число n . Докажите, что есть сто идущих подряд чисел, каждое из которых имеет общий делитель с n больший 1.