



Олимпиада  
Юношеской математической школы  
2 отборочный тур  
14 октября 2023 года  
11 класс



1. Вася взял простое число  $p$  и возвёл его в 2024-ю степень. Петя возвел  $p$  в 2023-ю степень и умножил получившееся число на 2. Коля сложил результаты Пети и Васи и прибавил к сумме единицу. При этом Коля утверждает, что у него получилась 2022-я степень какого-то натурального числа. Докажите, что кто-то из ребят обсчитался.
2. Вася в течение 14 дней ходит на фестиваль. В конце каждого дня он может взять синий, красный или зелёный билет. По окончании фестиваля подсчитываются очки всех участников следующим образом. За каждый синий билет участник получает одно очко. Число очков за каждый красный билет равно удвоенному числу имеющихся у участника синих билетов. Число очков за каждый зелёный равно утроенному числу имеющихся у участника красных билетов. Какое наибольшее число очков может набрать Вася?
3. В летний лагерь приехали 2023 девочки и 2023 мальчика. Известно, что каждый мальчик дружит ровно с двумя девочками. В конце лагеря проводится бал, в котором участвуют все дети в парах «мальчик — девочка». Пусть  $N$  — число способов разбить детей на пары так, что каждый дружит со своим партнёром. Чему может равняться  $N$ ? (Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.)
4. На параболе  $\omega$  выбрали точки  $A$  и  $B$ , оказалось, что отрезок  $AB$  проходит через фокус параболы — точку  $O$ . Затем на параболе отметили точку  $C$  так, что длины отрезков  $OC$  и  $AB$  равны. Через точку  $A$  провели прямую  $a$ , параллельную  $BC$ . Через  $B$  провели прямую  $b$ , параллельную  $AC$ . Докажите, что  $a$ ,  $b$  и директриса параболы  $\omega$  пересекаются в одной точке.  
Фокусом и директрисой параболы называются такие точка  $O$  и прямая  $t$ , что для всякой точки  $X$ , лежащей на параболе, расстояние от  $X$  до  $t$  равно расстоянию от  $X$  до  $O$ .
5. Сколько решений в рациональных числах может иметь уравнение

$$x^3 + kx^2 - (k + 3)x + 1 = 0,$$

где  $k$  — вещественный параметр? Приведите все возможности и докажите, что других нет.