

Условия очного тура

7 класс

1. Вася написал на доске трёхзначное число. Петя заметил, что у этого числа одинаковые остатки от деления на 8 и 15. А Маша заметила, что его последняя цифра равна сумме первых двух. Какое число мог написать Вася? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)
2. Из пяти внешне неразличимых монет две нестандартны — одна фальшивая, которая весит легче настоящей, а вторая — монета-обманщик. Когда такая монета лежит на одной из чаш весов, весы показывают «невозможный» результат — не такой, как если бы на её месте была настоящая монета, и не такой, как если бы вместо неё была фальшивая. Как за три взвешивания определить, какая монета фальшивая и какая — обманщик?
3. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC , L — точка на стороне BC . Прямая l , проходящая через L , пересекает отрезок AC в точке Y , а продолжение отрезка AB за точку B — в точке X . Что больше: XU или $BX + CY$?
4. В стране 2023 города, некоторые из них соединены дорогами с двусторонним движением. Правительство хочет закрыть некоторые из дорог на ремонт. Известно, что если закрыть любые две дороги, то из любого города можно проехать в любой другой. Докажите, что можно закрыть какие-то три дороги, выходящие из какого-то одного города, и по-прежнему из него можно будет проехать в любой другой город.
5. Снежная Королева и Мистер Икс играют в игру, выписывая числа на доску по следующим правилам. Первое число каждый выписал произвольным образом, а затем они по очереди выписывают на доску либо сумму, либо разность последнего и предпоследнего из выписанных чисел. Игра заканчивается, когда на доску выписано 2023 числа. Победитель определяется остатком числа $n_{2021} \cdot n_{2023} - n_{2022}^2$ от деления на 3 (n_{2021} — 2021-е выписанное на доску в ходе игры число.). Остаток 1 означает победу Снежной Королевы и вечную зиму, остаток 2 — победу Мистера Икс и вечное лето, а остаток 0 — боевую ничью. Кто побеждает при правильной игре, если Королева ходит первой?
6. Круг разбит на 400 секторов. В одном из секторов стоит фишка. За один ход её можно переставить в соседний или в противоположный сектор. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы не было двух соседних непосещённых секторов?
7. У портного есть 11 одинаковых 10-метровых рулонов ткани и 5 клиентов. Он может резать рулоны на произвольные куски так, чтобы их можно было поровну разделить между клиентами (каждому по 22 метра). Среди всех таких «раскроев» портному надо выбрать тот, в котором размер минимального из получившихся кусков рулона принимает наибольшее возможное значение. Чему равно это значение?