

Условия очного тура

8 класс

1. На диаметре AB построена окружность с центром O . На ней отмечены точки D и C так, что хорда DC пересекает диаметр AB в точке P , а $\angle AOD = 3 \cdot \angle BOC$. Докажите, что $OP > \frac{AB}{4}$.
2. На вилле в Лапландии за круглым столом сидели 100 человек: рыцари и шпионы. Рыцари всегда говорят правду и носят одинаковые носки. Шпионы говорят правду друг про друга, а про рыцарей врут, носки у шпионов могут быть какие угодно. У каждого за столом спросили сначала, одинаковые ли носки у соседа слева, а потом — разные ли носки у соседа справа. По одному из вопросов услышали 60 утвердительных ответов. Сколько утвердительных ответов было по второму вопросу?
3. Санта-Клаус проводит «Уникальную Одноразовую Новогоднюю Лотерею». Он один раз выбирает натуральные числа a и b , $a > b$, а затем компьютер автоматически для каждого целого x нумерует числом $\frac{29x+a}{41x+b}$ какой-то из подарков на складе Санты. Может ли Вовочка заранее выбрать для себя какое-то число, которым точно будет пронумерован один из подарков (независимо от изначального выбора a и b)?
4. Снежная Королева и Мистер Икс играют в игру, выписывая числа на доску по следующим правилам. Первое число каждый выписал произвольным образом, а затем они по очереди пишут либо сумму, либо разность между последним и предпоследним из выписанных чисел (из последнего вычитается предпоследнее). Игра заканчивается, когда на доску выписаны 2023 числа. Победитель определяется остатком от деления числа $n_{2021} \cdot n_{2023} - n_{2022}^2$ на 3 (n_{2021} — 2021-е выписанное на доску в ходе игры число.) Остаток 1 означает победу Снежной Королевы и вечную зиму, 2 — победу Мистера Икса и вечное лето, а 0 — боевую ничью. Каким будет результат при правильной игре, если Королева ходит первой?
5. У портного есть 11 одинаковых десятиметровых рулонов ткани и пять клиентов. Он может резать рулоны на произвольные куски так, чтобы их можно было поровну разделить между клиентами (каждому по 22 метра). Среди всех таких «раскроев» портному надо выбрать тот, в котором размер минимального из получившихся кусков рулона принимает наибольшее возможное значение. Чему равно это значение?
6. Дан треугольник ABC . За точку B на луче AB отложен отрезок $BD = AC$. Точка E на плоскости отмечена так, что $\angle BAE = \angle BCA$, $AE = BC$, причём точки E и C лежат в разных полуплоскостях относительно AB . Прямая l проведена через середины отрезков CE и CD . Докажите, что l делит отрезок AB пополам.
7. Стая ворон слетелась праздновать Новый год, и каждая принесла с собой по одному куску сыра какого-то конкретного сорта, причём у всех ворон были разные сорта сыра. После этого некоторые пары ворон попробовали друг у друга сыр, при этом свой сыр никакая ворона не пробовала.
Для каждой пары ворон назовём сорт *пробегустированным*, если его попробовала ровно одна ворона из этой пары, причём изначально он не принадлежал ни одной из ворон этой пары.
Оказалось, что для всякой пары ворон количество *пробегустированных* сортов больше, чем половина от количества всех остальных ворон. Докажите, что ворон в стае нечётное число.