

Условия очного тура

9 класс

Сюжет 1

Вася нашёл кубический граф (все степени вершин равны трём) и нарисовал его на плоскости без самопересечений так, что все рёбра являются отрезками, параллельными прямым ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 , причём рёбра, исходящие из одной вершины, параллельны разным прямым. Петя покрасил каждое ребро в красный или синий цвет так, что если три отрезка образуют «клювик», то центральное ребро одного цвета, а крайние другого, а если «треножку», то все цвета одинаковые.



1. Приведите пример получившейся картинке.
2. Покажите, что Васин граф двудольный.
3. Оказалось, что на получившейся картинке нет одноцветных циклов. Покажите, что тогда клювиков больше, чем треножек.
4. Вася нашёл кубический граф посложнее, и нарисовал его с некоторыми пересечениями ребер. Пете всё равно удалось раскрасить ребра требуемым образом, при этом в его раскраске пересекаются только рёбра разных цветов. Вася накрыл каждое пересечение рублёвой монеткой, под которой не оказалось точек из других рёбер. Докажите, что теперь Вася сможет перерисовать картинку только под монетками так, чтобы она снова удовлетворяла преамбуле (изменив соответствующий граф).

Сюжет 2

Дана таблица с n столбцами и N строками. В каждой клетке таблицы стоит либо 0, либо 1. Одинаковых строк нет. Назовем эту таблицу k -интересной, если для любых k столбцов выполнено следующее условие: при стирании всех столбцов, кроме данных, среди получившихся строк найдется ровно $2^k - 1$ попарно различных.

1. Приведите пример k -интересной таблицы для произвольных n и $k < n$ (N можете выбирать по желанию).
2. Приведите пример 3-интересной таблицы для произвольного $n > 3$ и $N = 3n - 2$.
3. Докажите, что для любой 2-интересной таблицы выполняется неравенство $n \leq 2N - 3$.
4. Зафиксируем некоторые n и k ($n > k$). Найдите максимальное N , для которого существует k -интересная таблица с N строками.

Сюжет 3

Треугольник ABC вписан в окружность ω . Касательная к ω в точке A пересекает продолжение стороны BC в точке D . Точки E на стороне AC и F на стороне AB таковы, что $\angle ADF = \angle CDE$.

1. Пусть прямая DF пересекает AC в точке F' , DE пересекает AB в точке E' . Докажите, что точки E, E', F, F' лежат на одной окружности.
2. Прямые DE и DF совпали. Докажите, что $BF + CE$ больше четверти периметра ABC .
3. Докажите, что все окружности AEF проходят через фиксированную точку помимо A .
4. Прямая EF пересекает окружность ω в точках P и Q . Докажите, что биссектрисы углов EDF и PDQ совпадают.