



Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
24 сентября 2023 года
9 класс



1. $ABCD$ — трапеция с основанием AD и $\angle BAD + \angle ADC \neq 120^\circ$. Точки A' и B' симметричны точкам A и B относительно прямой CD , а точки C' и D' симметричны точкам C и D относительно прямой AB . Докажите, что $A'B'C'D'$ — трапеция.

2. Квадратный трёхчлен $x^2 - px + q$, где p и q — натуральные числа, имеет два корня. Оказалось, что если q уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.

3. Знайка взял натуральные числа a и b и выписал на первый лист все делители a , а на второй лист — все делители b . Оказалось, что на первом листе выписано 7 чисел, а в совокупности в двух списках Знайка выписал 10 различных чисел. Докажите, что $\text{НОД}(a, b)$ — точный квадрат.

4. Вычислите

$$\left\lfloor \frac{[\sqrt{1}]}{[\sqrt{1}]} + \frac{[\sqrt{2}]}{[\sqrt{2}]} + \dots + \frac{[\sqrt{2022}]}{[\sqrt{2022}]} + \frac{[\sqrt{2023}]}{[\sqrt{2023}]} \right\rfloor.$$

Здесь $[x]$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее x , а $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, не большее x .

5. Есть 10 тарелок, на 9 лежит по 100 блинов, одна пуста. Блины раскрашены в 9 цветов, каждого цвета по 100 блинов. Разрешается снять верхний блин с какой-либо тарелки, и переложить его на верх тарелки, где меньше 100 блинов. Всегда ли такими операциями можно сделать 9 стопок по 100 одноцветных блинов?