

Олимпиада ЮМШ 2024-25 года

Заключительный тур

10 класс

24-119. Для конечного семейства подмножеств H конечного множества U , каждое множество которого содержит хотя бы 2 элемента, определим граф $G(H)$ 1-пересечений, вершинами которого являются множества H , а ребра соединяют пары множеств с единичным пересечением.

24-119.1. Вася нашел удивительную систему

$$H = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}\}$$

в множестве $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Докажите, что как бы Вася ни покрасил элементы U в два цвета, в H найдется одноцветное множество.

24-119.2. Докажите, что если $G(H)$ не имеет ребер, то элементы U могут быть покрашены в два цвета, так что каждое множество семейства H содержит элементы обоих цветов.

24-119.3. Оказалось, что $G(H)$ — двудольный. Докажите, что элементы U могут быть покрашены в два цвета, так что каждое множество семейства H содержит элементы обоих цветов.

24-119.4. Оказалось, что $G(H)$ правильно красится в 4 цвета. Докажите, что элементы U могут быть покрашены в четыре цвета, так что никакое множество семейства H не является одноцветным.

24-120. Для последовательности вещественных чисел $X = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, принадлежащих отрезку $[0, 1)$, рассмотрим набор последовательностей $F_{X,k}(x, y)$, определенных для всех $0 \leq x \leq y \leq 1$ следующим образом:

$$F_{X,k}(x, y) = \left| \#\{i \in \{1, 2, \dots, k\} \mid x_i \in [x, y)\} - k(y - x) \right|.$$

Иными словами, $F_{X,k}(x, y)$ — это модуль разности между количеством первых k чисел последовательности X в промежутке $[x, y)$ и длиной промежутка, умноженной на k .

24-120.1. Придумайте последовательность X чисел из $[0, 1)$, такую, что $F_{X,k}(x, y) \leq 2$ для всех k от 1 до 6 и любых $0 \leq x \leq y \leq 1$.

24-120.2. Найдите все вещественные числа C , такие, что существует последовательность X чисел из $[0, 1)$, такая, что $F_{X,k}(x, y) \leq C$ для всех k от 1 до 3 и любых $0 \leq x \leq y \leq 1$.

24-120.3. Пусть для некоторой последовательности X существует последовательность $B = b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, такая, что $F_{X,k}(0, y) \leq b_k$ для любого k и любого $0 \leq y \leq 1$. Докажите, что $F_{X,k}(x, y) \leq 2b_k$ для любого k и любых $0 \leq x \leq y \leq 1$.

24-120.4. Докажите, что существует последовательность X такая, что $F_{X,k}(x, y) \leq 10(\log_2 k + 2)$ для любого k и любых $0 \leq x \leq y \leq 1$.

24-121. Точки P и Q будем называть *изогонально сопряженными* в равностороннем треугольнике ABC , если пары прямых AP и AQ , BP и BQ , CP и CQ симметричны относительно оси симметрии треугольника ABC , которая проходит через соответствующую вершину. O — центр треугольника ABC .

24-121.1. Докажите, что середина отрезка AO изогонально сопряжена точке пересечения медиан треугольника BOC .

24-121.2. Докажите, что если O, P, Q лежат на одной прямой ℓ , то ℓ является осью симметрии треугольника ABC .

24-121.3. Оказалось, что точки O, P, Q лежат на одной прямой и точки P и Q лежат внутри треугольника ABC . Найдите $|1/OP - 1/OQ|$, если сторона треугольника ABC равна 1.

24-121.4. Оказалось, что $\angle POQ = 90^\circ$. Докажите, что PQ касается описанной окружности треугольника ABC .