

# Олимпиада ЮМШ 2024-25 года

## Заключительный тур

### 7 класс

**24-102.** В ряд выписаны девять различных натуральных чисел. Может ли так оказаться, что для любых двух троек подряд идущих чисел суммы чисел в этих тройках отличаются не более чем на 1?

**24-103.** Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . На продолжении отрезка  $AB$  за точку  $A$  отмечена точка  $X$ , на продолжении отрезка  $AC$  за точку  $A$  — точка  $Y$ , на продолжении отрезка  $BC$  за точку  $B$  — точка  $Z$ . Оказалось, что  $\angle AXC = \angle AYB = \angle AZB$ . Какой отрезок длиннее —  $XY$  или  $YZ$ ?

**24-104.** Серёжа написал пять подряд идущих чисел, больших 10, каждое из них возвёл в квадрат и стёр у каждого результата всё, кроме последних двух цифр. Могли ли все десять оставшихся цифр быть различными?

**24-105.** По кругу стоят 100 безумных светофоров. Каждую минуту они одновременно меняют цвет, причём каждый светофор переключает зелёный, жёлтый и красный цвета в некотором порядке по циклу. Всего есть два возможных цикла: зелёный-красный-жёлтый-зелёный-... и зелёный-жёлтый-красный-зелёный-... Сейчас одна пара соседних светофоров показывает одинаковые цвета, а остальные пары соседних светофоров — разные. Докажите, что или через минуту, или через две минуты найдутся два соседних светофора, показывающих один и тот же цвет.

**24-106.** В городе вырыто 1000 одинаковых по вместимости сточных колодцев, пронумерованных числами от 1 до 1000. Во время сезона дождей в каждый колодец заливалось столько литров воды в час, каков его номер, то есть в  $k$ -й колодец вода заливалась со скоростью  $k$  литров в час. Во избежание переполнения из-за неравномерного поступления воды колодцы были соединены трубами так, что если какой-то колодец заполнялся, вся вновь поступающая в него вода перетекала в следующий по номеру, из  $k$  в  $k + 1$ , а из 1000-го — в 1-ый. По окончании сезона дождей выяснилось, что все колодцы, кроме одного, оказались заполнены целиком. А каков номер этого не заполненного колодца?

**24-107.** На столе лежат 100 карточек с числами от 1 до 100. Аня и Боря играют в игру, начинает Аня. За один ход справа от всех выложенных карточек нужно выложить любую ещё не разыгранную карточку. В конце игры подсчитывается количество «особых» чисел, которые или больше обоих своих соседей, или меньше обоих своих соседей (крайние числа не являются «особыми»). Какое наибольшее количество «особых» чисел может получить Аня, как бы ни играл Боря?

**24-108.** Дано натуральное  $x > 4$  такое, что числа  $x - 1$  и  $x + 1$  простые. Назовем конечную последовательность натуральных чисел, меньших  $x$ , красивой цепочкой, если для любых двух соседних чисел  $a$  и  $b$  в ней выполнено  $\text{НОД}(ab - 1, x^2 - 1) > 1$ . Обязательно ли найдутся два различных числа, меньших миллиона, которые можно соединить красивой цепочкой?