

Олимпиада ЮМШ 2024-25 года

Заключительный тур

8 класс

24-109. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle B = 60^\circ$, $AC = CD$. Докажите, что $AB + AD = 2BC$.

24-110. Шестьдесят снайперов затеяли перестрелку. Снайперу, застрелившему n других снайперов, запрещено стрелять в того, кто сам убил менее $n/2$ снайперов. В итоге остался один поб

24-111. У натурального числа N есть ровно 320 натуральных делителей: $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{319} < d_{320} = N$. Может ли оказаться, что d_{320} делится на 1, d_{319} — на 2, d_{318} — на 3, $\dots$, d_{311} — на 10?

24-112. С числом много раз проделывают следующую операцию: заменяют число n на $n - \lceil \sqrt[3]{n} \rceil$, пока не получится трёхзначное число. Если получилось 991, то такое n назовём красным, а если 999, — то синим. Каких чисел от миллиарда (10^9) до триллиона (10^{12}) больше — красных или синих, и на сколько?

24-113. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка K такая, что $AK \parallel BD$. На отрезке AB выбрана точка E такая, что $\angle EKD = 90^\circ$. Пусть M — середина отрезка BE . Докажите, что $KM = MC$.

24-114. Пятеро мудрецов сидят вокруг баобаба. Каждый из них видит только двух соседей и имеет право написать на бумажке одно из двух слов — «Охотник» или «Фазан». Дальше король зачитывает содержимое всех бумажек (называя не только слово, но и того, кто эту бумажку написал). Смогут ли мудрецы договориться так, чтобы после этого каждый из них смог однозначно восстановить порядок, в котором они сидят?

24-115. Дано натуральное $x > 4$ такое, что числа $x - 1$ и $x + 1$ простые. Назовем конечную последовательность натуральных чисел, меньших x , красивой цепочкой, если для любых двух соседних чисел a и b в ней выполнено $\text{НОД}(ab - 1, x^2 - 1) > 1$. Обязательно ли найдутся два различных числа, меньших миллиона, которые можно соединить красивой цепочкой?