

Олимпиада ЮМШ 2024-25 года

Заключительный тур

9 класс

24-116.

24-116.1. Вася нашел 11 вершин и хочет провести между ними n красных ребер и n синих ребер так, чтобы между любыми вершинами было не более одного ребра, и чтобы никакие два разноцветных ребра не имели общий конец. При каком наибольшем n такое возможно?

24-116.2. Вася нашел граф, ребра которого раскрашены в красный, синий и зеленый цвета. Оказалось, что среди любых 10 вершин есть красное ребро, среди любых 20 вершин есть синее ребро, а среди любых 30 вершин есть зеленое ребро. Докажите, что среди любых 60 отмеченных вершин Вася найдет вершину, соединенную красным, синим и зеленым ребрами с другими отмеченными вершинами.

24-116.3. Вася нашел граф G на вершинах от 1 до 1000, после чего построил на его основе граф $G \times G$ на миллионе вершин, понравившийся ему гораздо больше, по следующему правилу: он рассмотрел таблицу 1000×1000 и для каждого ребра между вершинами i, j графа G соединил красными ребрами клетки (i, y) и (j, y) для всех y и синими ребрами клетки (x, i) и (x, j) для всех x .

Оказалось, что среди любых a вершин графа G найдется ребро. Докажите, что Вася сможет найти в любом множестве вершин графа $G \times G$ размера $2000a$ пару разноцветных ребер с общим концом.

24-116.4. Вася нашел граф, ребра которого раскрашены в k цветов. Оказалось, что среди любых a_i вершин найдется ребро i -ого цвета. Докажите, что внутри любого множества из $a_1 + \dots + a_k$ вершин Вася сможет выбрать ребра $e_1, \dots, e_k$ попарно различных цветов, таких что для всех i выполняется а) e_i и e_{i+1} имеют общий конец и б) общий конец ребер e_i и e_{i+1} отличается от общего конца ребер e_{i+1} и e_{i+2} , хотя бы $k!$ способами.

24-117. Пусть x — натуральное число. Вася составляет красивую цепочку: цепочка должна состоять из чисел, меньших x , а для любых двух соседей a, b числа $ab - 1$ и $x^2 - 1$ должны иметь общий делитель, больший 1.

24-117.1. Пусть $x = 60$. Найдите какую-нибудь цепочку из четырех чисел, больших 1, в которой первое и последнее число совпадают, но не все числа равны.

24-117.2. Пусть $x = 582$, тогда Вася может соединить цепочкой любые два числа, меньшие x .

24-117.3. Пусть $x + 1 = n^2$, где n нечетно. Придумайте цепочку, в которой какие-то два числа, большие 1, различаются ровно в n раз.

24-117.4. Верно ли, что если $x - 1$ и $x + 1$ — простые, большие 10, то Вася гарантированно сможет соединить цепочкой какие-то различные числа, меньшие миллиона? (Ср. с задачей 24-108)

24-118. Дан остроугольный треугольник ABC с площадью S и точки P, Q, R выбраны на сторонах BC, AB, AC , соответственно так, что $PQ \perp BC, QR \perp AB, PR \perp AC$.

24-118.1. Пусть ABC — равносторонний треугольник площади 1. Найдите площадь треугольника PQR .

24-118.2. Точки P', Q', S' выбраны на сторонах BC, AB, AC , соответственно так, что $P'Q' \perp AB, Q'R' \perp AC, P'R' \perp BC$. Докажите, что точки P, Q, R, P', Q', R' лежат на одной окружности.

24-118.3. Пусть O — центр окружности из прошлого пункта. Докажите, что O является точкой пересечения медиан треугольника с вершинами в серединах отрезков PP', QQ', RR' .

24-118.4. Дан вписанный выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки P, Q, R, S выбраны на прямых AD, AB, CB, DC так, что $PQ \perp AB, QR \perp BC, RS \perp CD, SP \perp DA$. Оказалось, что четырехугольники $PQRS$ и $ABCD$ (соответственно) подобны. Докажите, что центр описанной окружности четырехугольника $PQRS$ — это точка пересечения диагоналей $ABCD$.