



Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
10 класс



Решения

1. Андрей, Борис, Виктор и Геннадий собирали ягоды. Оказалось, что Андрей с Борисом вместе набрали треть от того, что собрали Виктор и Геннадий вместе. Борис и Виктор собрали две трети от собранного Андреем и Геннадием вместе. А Андрей с Виктором — $7/13$ от собранного Борисом и Геннадием. Какую долю ягод (от общего количества) собрал Андрей?

Ответ: $1/10$.

Решение. Докажем общий факт. Пусть $\frac{a+b}{c+d} = x$. Тогда $\frac{c+d}{a+b} = \frac{1}{x}$, то есть

$$\frac{a+b+c+d}{a+b} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}. \text{ Тогда } \frac{a+b}{a+b+c+d} = \frac{x}{x+1}.$$

Пусть a, b, c, d — количество ягод, собранных Андреем, Борисом, Виктором и Геннадием соответственно. Тогда $\frac{a+b}{a+b+c+d} = \frac{1}{4}$, $\frac{b+c}{a+b+c+d} = \frac{2}{5}$ (и значит, $\frac{a+d}{a+b+c+d} = \frac{3}{5}$), а также $\frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{7}{20}$. Складывая полученные равенства, имеем

$$\frac{3a+b+c+d}{a+b+c+d} = \frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{7}{20} = \frac{24}{20}.$$

Тогда $\frac{2a}{a+b+c+d} = \frac{4}{20}$, откуда и следует ответ.

Критерии.

Правильное решение — 7 баллов.

Арифметическая ошибка в конце — снимается 5 баллов.

Только ответ — 0 баллов.

2. Пять команд сыграли турнир по квиддичу: каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. За проигрыш давали 0 очков, за ничью — 3 очка, за победу — 4 очка, а если победа была блестящей (являлась победа блестящей или обычной, определял лично Дамблдор), то команде присуждалось 6 очков. Четыре команды набрали 19, 13, 13 и 7 очков. Сколько очков набрала пятая команда?

Ответ: 0.

Решение. Если бы все победы были блестящими, то в каждой игре разыгрывалось бы по 6 очков, а тогда пять команд вместе бы набрали 60 очков. Но если бы все победы были блестящими, то количество очков у каждой команды делилось бы на 3, т. е. четыре команды с известным количеством очков набрали бы как минимум 21, 15, 15 и 9 очков — это уже 60 очков. Значит, пятая команда все матчи проиграла и набрала 0 очков.

Критерии. правильное решение — 7 баллов

Просто пример игр — 3 балла

Перебор случаев без нормального обоснования разбиений — 5 баллов.

3. У трехчлена $x^2 + px + q$ с натуральными коэффициентами нет корней, но если p и q увеличить на 0,1, то корни (хотя бы один) появятся. Найдите наименьшее возможное значение p .

Ответ: 17.

Решение. Пример: трёхчлен $x^2 + 17x + 73$ не имеет корней (потому что $17^2 - 4 \cdot 73 = -3$), но $17,1^2 - 4 \cdot 73,1 = 0,01 > 0$.

Поскольку исходный трёхчлен не имеет корней, то $p^2 - 4q < 0$. Но числа p, q целые, поэтому $p^2 - 4q \leq -1$. Заметим, что равенства $p^2 - 4q = -1$ и $p^2 - 4q = -2$ выполняться не могут, так как квадраты целых чисел не могут давать остатки 2 и 3 по модулю 4.

После прибавления имеем $(p + 0,1)^2 - 4(q + 0,1) \geq 0$, т.е. $(p^2 - 4q) + (0,2p - 0,39) \geq 0$, откуда $0,2p - 0,39 \geq 3$, т.е. $p \geq 16,95$. Так как p целое, получаем искомую оценку.

Критерии. Решена задача с 1,1 — 1 балл.

Просто оценка из $0,2p - 0,39 = 0$ баллов.

Перебор случаев значения дискриминанта, разобраны при этом только минимальные значения оценки — 3 балла.

Только ответ — 0 баллов.

Решение верное, но не доказано, что 17 подходит, только оценка — минус 2 балла.

При этом понятно, как строить q — минус 1 балл.

Доказано, что $p \geq 7$ — 0 баллов.

4. Дан равносторонний треугольник ABC . Пусть M — середина отрезка BC . Точка D симметрична точке A относительно точки B , а точка K — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую MD . Докажите, что K лежит на вписанной окружности треугольника ABC .

Решение 1. Пусть E — точка, симметричная D относительно M , N — середина AC , L — середина AB . Тогда $BDCE$ — параллелограмм, в частности, отрезок CE равен и параллелен $BD = AB$, то есть ACE — правильный треугольник и, в частности, EN перпендикулярен CN . Значит, четырехугольник $ENKC$ — вписанный (в окружность с диаметром CE), а тогда $\angle NKE = \angle NCE = \frac{\pi}{3}$. Поэтому $\angle NKM = \frac{2\pi}{3} = \pi - \angle MLN$, то есть четырехугольник $MLNK$ — вписанный, то есть K лежит на описанной окружности треугольника LMN — она же вписанная окружность треугольника ABC .

Решение 2. Пусть O — центр треугольника, X — середина AO , она же точка пересечения прямой AM со вписанной окружностью (так как $2 \cdot OM = AO$). Достаточно доказать перпендикулярность CX и MD — тогда их точка пересечения совпадет с K и попадет на окружность (угол MKX — прямой и опирается на диаметр).

Это можно сделать так. Заметим, что угол ACD прямой, треугольники DBC и AOC подобны (равнобедренные с углом $\frac{2\pi}{3}$ при вершине), значит, подобны и отсекаемые от них медианами треугольники AXC и CMD . Поэтому $\angle ACX = \angle CDM = \frac{\pi}{2} - \angle MPC$, где P — точка пересечения прямых DM и AC . Значит, CX перпендикулярна MD .

Комментарий: вычисление степеней точек D, M (они равны 3 и $\frac{1}{4}$, если принять $AB = 1$) показывает, что MD — радикальная ось точки C и описанной окружности треугольника AOL (с центром в X), что также дает искомую перпендикулярность.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Арифметические ошибки при счете — 5 баллов.
- Неполный счет или неверное решение — 0 баллов.

5. На доске написаны десять натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Аня составляет из них все возможные пары из них и для каждой пары a_i, a_j пишет на своём листочке, сколько общих делителей имеют числа a_i и a_j — таким образом, у Ани на листочке написано 45 чисел. Боря берёт всевозможные тройки чисел a_i, a_j и a_k и пишет на своём листочке, сколько общих делителей имеет эта тройка — таким образом, Боря записал 120 чисел. Оказалось, что все Борины числа больше 1, а среди Аниных хотя бы 20 являются простыми. Докажите, что хотя бы 20 Бориных чисел также являются простыми.

Решение. Для начала докажем следующую лемму.

Лемма. Если количество делителей числа x является простым, то x — степени простого числа.

Доказательство леммы. Пусть $x = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$. Тогда количество делителей равно $(b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_k + 1)$. Если это число простое, то $k = 1$.

Тройку (a_i, a_j, a_k) назовём хорошей, если $\text{НОД}(a_i, a_j, a_k)$ имеет простое количество делителей. Докажем, что хотя бы 20 троек является хорошими (это и требуется по условию задачи).

Построим граф: его вершинами будут числа a_i (десять вершин), а ребро между a_i и a_j проведём, если $\text{НОД}(a_i, a_j)$ имеет простое количество делителей.

Докажем, что если есть рёбра $a_i a_j$ и $a_i a_k$, то тройка (a_i, a_j, a_k) хорошая. Из леммы следует, что $\text{НОД}(a_i, a_j) = p^\alpha$, $\text{НОД}(a_i, a_k) = q^\beta$. Так как $\text{НОД}(a_i, a_j, a_k) > 1$, то $p = q$, а тогда $\text{НОД}(a_i, a_j, a_k) = p^{\min \alpha, \beta}$. Осталось заметить, что числа $\alpha - 1$ и $\beta - 1$ простые.

Докажем, что в полученном графе имеется не менее 20 «галочек» (т.е. пар рёбер с одной общей вершиной). Пусть $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ — степени вершин графа. Найдём минимальное количество галочек. По условию $b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = 40$ (т.к. рёбер 20, а мы считаем сумму степеней вершин). Количество «галочек» оценивается как

$$\frac{b_1(b_1 - 1)}{2} + \frac{b_2(b_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{b_{10}(b_{10} - 1)}{2} = \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{10}^2 - 40)$$

(для каждой вершины выберем пару исходящих из неё рёбер). Если сумма чисел фиксированна, то сумма их квадратов принимает наименьшее значение при равных числах, поэтому количество галочек не менее чем $10 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 60$. Каждая галочка порождает хорошую тройку, а каждая хорошая тройка может быть порождена максимум тремя галочками, а значит, хороших троек не менее 20.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Доказано, что все НОД Ани — это степени простых — 4 балла.
- Если решение неверное — 0 баллов.