



Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
10 класс



Решения

1. Вася прибавил к каждому числу от 2 до 10000 его наименьший делитель, отличный от единицы, и выписал все получившиеся 9999 сумм на доску. Найдётся ли какое-нибудь число, которое повторяется хотя бы шесть раз?

Ответ: Не найдётся.

Решение. Допустим, что число M повторилось хотя бы шесть раз. Рассмотрим один из таких моментов: пусть $M = a + p$, где p — наименьший (простой, естественно) делитель a , кроме единицы. Значит, M делится на p . Рассуждая аналогично, M должно делиться ещё на пять простых чисел, причём эти простые числа должны быть разными (при совпадении p будут совпадать и исходные числа, из которых получили a).

Итак, M делится хотя бы на шесть различных простых чисел. Но наименьшее такое число — это $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030 > 10000$. Противоречие.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

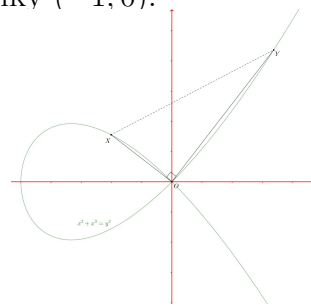
(б) Неправильно посчитана нижняя граница минимального числа с 6 повторами, но все остальное верно — 5 баллов

2. На координатной плоскости с началом координат O отмечены все точки (x, y) , удовлетворяющие соотношению $x^2 + x^3 = y^2$. Кирилл взял отмеченные точки A и B , такие что $OA \perp OB$. Докажите, что прямая AB проходит через некоторую точку, не зависящую от выбора A и B .

Решение. Докажем, что прямая AB должна проходить через точку $(-1, 0)$.

Пусть A имеет координаты (x_0, y_0) , а $B = (x_1, y_1)$. У нас есть три условия: A лежит на кривой $x^2 + x^3 = y^2$ (на рисунке показан график этой кривой); B лежит на этой кривой; $OA \perp OB$. Это записывается следующей системой:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_0^3 = y_0^2 \\ x_1^2 + x_1^3 = y_1^2 \\ x_0 x_1 + y_0 y_1 = 0. \end{cases}$$



Из этой системы имеем $x_0^2 x_1^2 = y_0^2 y_1^2 = (x_0^2 + x_0^3)(x_1^2 + x_1^3) = x_0^2 x_1^2 (1 + x_0)(1 + x_1)$, откуда $1 = (1 + x_0)(1 + x_1)$, или $x_0 + x_1 + x_0 x_1 = 0$ (точки A и B , очевидно, должны иметь ненулевые абсциссы).

Уравнение прямой AB имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1}.$$

Подставим в это уравнение $x = -1, y = 0$. Нам надо доказать, что

$$\frac{-1 - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{-y_1}{y_0 - y_1}.$$

Иначе говоря, необходимо доказать равенство

$$(1 + x_1)(y_0 - y_1) = y_1(x_0 - x_1).$$

Домножим обе части на $y_0 + y_1$ (случай $y_0 = -y_1$ рассмотрим позже).

$$(1 + x_1)(y_0^2 - y_1^2) = y_1(y_0 + y_1)(x_0 - x_1),$$

$$(1 + x_1)(x_0^2 + x_0^3 - x_1^2 - x_1^3) = y_1(y_0 + y_1)(x_0 - x_1),$$

$$(1 + x_1)(x_0 - x_1)(x_0 + x_1 + x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2) = y_1(y_0 + y_1)(x_0 - x_1).$$

Сократим на $x_0 - x_1$ (так как тождество будет доказываться «снизу вверх», то нам не нужно будет проверять случай $x_0 = x_1$) и воспользуемся тем, что $x_0 + x_1 + x_0x_1 = 0$:

$$(1 + x_1)(x_0^2 + x_1^2) = y_1(y_0 + y_1);$$

$$x_0^2 + x_1^2 + x_0^2x_1 + x_1^3 = y_0y_1 + y_1^3;$$

$$x_0^2 + x_0^2x_1 = y_0y_1.$$

Так как $y_0y_1 = -x_0x_1$, нам нужно доказать

$$x_0^2 + x_0^2x_1 = -x_0x_1;$$

$$x_0(x_0 + x_1 + x_0x_1) = 0,$$

что является верным тождеством. Значит, либо верно искомое тождество, либо $y_0 = -y_1$.

Пусть $y_0 = -y_1$. Тогда $y_0^2 = y_1^2$, то есть $x_0^2 - x_0^3 = x_1^2 + x_1^3$. Перенесём все слагаемые в обе части и разложим на множители:

$$(x_0 - x_1)(x_0 + x_1 + x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2) = 0;$$

$$(x_0 - x_1)(x_0^2 + x_1^2) = 0.$$

Так как x_0 и x_1 не равны 0, то $x_0 = x_1$. Вспоминая, что $y_0 = -y_1$, имеем

$$x_0^2 + x_0^3 = y_0^2 = -y_0y_1 = x_0x_1 = x_0^2,$$

откуда $x_0^3 = 0$, что невозможно.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

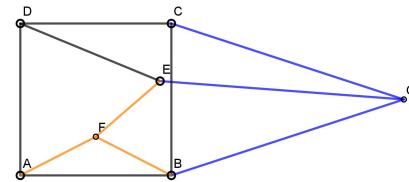
(б) Неполный счет — 0 баллов

3. $ABCD$ — квадрат. Внутри него взята точка F , для которой $\angle FAB = \angle FBA = 27^\circ$, а снаружи — точка G такая, что $\angle ABG = \angle DCG = 162^\circ$. Найдите величину угла FDG .

Ответ: 45° .

Решение.

Пусть E — точка, симметричная вершине A относительно прямой DF . Тогда $FE = FA = FB$, то есть F — центр описанной окружности треугольника AEB , откуда $\angle AEB = 0.5\angle AFB = 63^\circ$. Кроме того, так как $DE = DA = DC$, то E лежит на окружности (D, DA) , откуда $\angle AEC = 270^\circ/2 = 135^\circ$. Следовательно, $\angle CEB = 360^\circ - 135^\circ - 63^\circ = 162^\circ$. Но тогда в окружности, описанной вокруг треугольника BEC , центральный угол, опирающийся на BC , равен $360^\circ - 2 \cdot 162^\circ = 36^\circ$, а значит, центром этой окружности является G .



Мы получили, что четырёхугольники $DCGE$ и $DAFE$ являются дельтоидами, а значит, DG и DF являются биссектрисами углов CDE и EDA соответственно. Следовательно, $\angle FDG = 0.5\angle CDA = 45^\circ$.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) Сведение к большому выражению или подсчет округленных значений — не больше 1 балла

(в) Неполный счет — 0 баллов

4. Яша, Юра и Эдик решили съездить на рыбалку на пруд, но оказалось, что их мотоцикл вмещает лишь двоих, включая водителя. Тогда Яша с Юрой поехали на мотоцикле, а Эдик пошёл пешком. Яша отвёз Юру до пруда, вернулся за Эдиком, и они поехали вместе. По пути Эдик заметил, что Яше не стоило довозить Юру до пруда, а надо было посадить Юру немного раньше. И если бы Яша посадил Юру так, что все трое друзей добрались бы до озера одновременно, то они сэкономили бы 12% времени. Скорости пешеходов постоянны и равны между собой, скорость мотоцикла постоянна и более чем в два раза больше скорости пешехода. Во сколько раз скорость мотоцикла больше скорости пешехода?

Ответ: в 7 раз.

Решение. Пусть скорость мотоцикла больше скорости пешехода в x раз. Обозначим A — начало пути, B — конец пути, C — точка, в которой Яша забрал Эдика в первом заезде, M — точка, в которой Яша забрал Эдика во втором заезде, N — точка, в которой Яша посадил Юру во втором заезде. За единицу длины примем расстояние AC , которое Эдик прошел пешком в первом заезде, а за единицу времени — время, за которое Эдик прошёл это расстояние.

Рассмотрим первый заезд. В нём Эдик прошел пешком расстояние $AC = 1$, а Яша проехал за это время расстояние x , которое равно пути $AB + BC$. Вместе они преодолели расстояние $2AB = AC + AB + BC = 1 + x$.

Найдём время первого заезда. Эдик за время 1 преодолел расстояние AC . Яша за это время проедет путь $AC + CB + BC$. Далее Эдик и Яша на мотоцикле проедут расстояние CB . Так как расстояние $AC = 1$, то Яша проедет AC за время $1/x$. Поэтому путь $CB + BC$ он проедет за время $(1 - 1/x)$, а путь CB — за время $(1 - 1/x)/2$. Итого на весь путь рыбаки потратят $1 + (1 - 1/x)/2 = \frac{3x-1}{2x}$.

Рассмотрим второй заезд. Пусть в этом случае Эдик прошел пешком расстояние $AM = a$, а Юра — $NB = b$. Тогда $a + xa = 2AN$, $b + xb = 2MB$, и можно составить два уравнения

$$a + xa + 2b = 2AB, \quad b + xb + 2a = 2AB.$$

Вычитая из первого второе, получаем $AM = a = b = NB$. Подставляя в первое $a = b$ и $2AB = 1 + x$, получаем $AM = a = \frac{x+1}{x+3}$.

Рассуждая аналогично первому заезду получаем, что общее время второго заезда составляет

$$a + \frac{a}{x} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{a}{x} \right) = a \frac{3x+1}{2x} = \frac{x+1}{x+3} \cdot \frac{3x+1}{2x},$$

что составляет 88% от времени первого заезда. Поэтому

$$\frac{x+1}{x+3} \cdot \frac{3x+1}{2x} = \frac{88}{100} \cdot \frac{3x-1}{2x},$$

откуда $x_1 = 7$ или $x_2 = \frac{13}{9}$. Второй корень — посторонний, так как по условию $x > 2$.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) Взят не тот корень правильного квадратного уравнения — 6 баллов

5. В стране 30 городов, некоторые города соединены между собой дорогами так, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города). Известно, что среди любых пяти городов найдутся хотя бы три дороги между этими городами. Докажите, что можно объехать 29 городов, не побывав ни в одном городе дважды.

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, а ребрами — дороги. По условию он связан, и для любых 5 вершин есть хотя бы 3 ребра между ними. Рассмотрим самый длинный путь, в котором никакая вершина не повторяется. Пусть количество вершин в нем L . Наша цель заключается в том, чтобы доказать, что $L \geq 29$.

Для начала заметим, что $L \geq 3$, потому что иначе никакие 2 не имеют общих концов, что противоречит связности. Теперь заметим, что либо $L = 30$ (что нас устраивает), либо конца пути длины L не соединены ребром. Действительно, пусть они соединены ребром. Значит этот путь на самом деле цикл. Тогда из вершин этого цикла ребра не могут выходить наружу, так как иначе можно было бы удлинить путь (разорвав цикл рядом с вершиной, из которой ребро выходит наружу). Но тогда цикл образует компоненту связности, значит других вершин нет и $L = 30$.

Теперь покажем, что $L \geq 15$. Пусть $A_1 A_2 \dots A_L$ — наш путь. Тогда из A_1 и A_L ребра не ведут в вершины, не лежащие в пути (иначе можно удлинить путь). Тогда заметим, что если $L < 15$, то вне пути есть хотя бы 16 вершин. Рассмотрим любые 3 из них и добавим к ним концы пути. По условию в этой пятерке хотя бы 3 ребра, и они могут проходить только среди трех вершин, которые вне пути, значит все те ребра есть (потому что их ровно 3). Это означает, что на вершинах, которые оказались вне пути имеет место полный граф, а значит и путь длины хотя бы 16. Значит мы поняли, что $L \geq 15$. Это означает, что далее мы можем пользоваться существованием различных вершин A_1, A_2, A_3, A_L в нашем пути.

Предположим, что $L < 29$. Тогда есть хотя бы 2 вершины, которые не попали в путь, назовем их X и Y , вершины пути все так же называются $A_1, A_2, \dots, A_L$. Тогда в нашем графе отсутствуют ребра XA_1, XA_L, YA_1, YA_L , потому что иначе можно было бы добавить X или Y в один из концов пути. Также мы уже знаем, что нет ребра $A_1 A_L$. Рассмотрим 2 случая: XY не соединены ребром и XY соединены ребром.

Случай 1. Тогда в четверке $XYA_1 A_L$ нет ни одного ребра. Рассмотрим пятерку $XYA_1 A_2 A_L$. В ней есть хотя бы 3 ребра, значит из ребер $A_2 X, A_2 Y, A_2 A_1, A_2 A_L$ отсутствует не более чем одно. Аналогично среди ребер $A_3 X, A_3 Y, A_3 A_1, A_3 A_L$ отсутствует не более, чем одно. Значит всего из этих восьми ребер отсутствуют не более, чем 2. Среди ребер XA_2 и XA_3 в графе есть не более, чем одно, иначе вершину X можно вставить в путь между A_2 и A_3 , аналогично из ребер YA_2 и YA_3 есть не более, чем одно. Значит остальные 4 ребра точно есть в графе, в частности ребра $A_1 A_3$ и $A_2 A_L$. Но тогда мы сразу нашли путь длины L , у которого концы соединены ребром — это $A_2 A_1 A_3 \dots A_L$. Противоречие, значит этот случай невозможен.

Случай 2. Заметим, что в таком случае в графе нет ребер XA_2 и YA_2 , иначе можно было бы пару XY вставить в начало пути вместо A_1 . Тогда Рассмотрим пятерку $XYA_1 A_2 A_L$.

В ней уже гарантированно отсутствуют все ребра, кроме A_1A_2 , A_2A_n и XU , значит все эти ребра есть в графе. Тогда рассмотрев путь $A_1A_2A_LA_{L-1} \dots A_3$ длины L поймем, что ни одна из вершин X, U не соединена с A_3 . Также из существования этого пути следует, что его концы не соединены, то есть A_1A_3 отсутствует. Тогда в пятерке $A_1A_3A_LXU$ точно отсутствуют все ребра, кроме XU и A_3A_L , что противоречит условию. И в этом случае получаем противоречие.

Значит $L \geq 29$, что и требовалось доказать.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Решение полагается на то что длина максимального пути ≤ 3 ребра, но этот факт не доказывается — 6 баллов
- Если человек пользуется существованием второй и третьей вершины в пути, не обосновывая — дыра в 1 балл.
- Если решение неверное — 0 баллов.
- Применение теоремы Дирака — 0 баллов