



Олимпиада
Юношеской математической школы

1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
11 класс



Решения

1. У Андрея есть две кучки с гирями. В одной кучке неограниченное количество гирь по 1 г, в другой — сто гирь по $\sqrt{n}$ г. Андрей знает, что n — натуральное число, не превосходящее 2024, но не знает, чему оно равно. Всегда ли он сможет при помощи чашечных весов определить, чему равно n ?

Ответ: Всегда.

Решение. Взвесим все сто монет $\sqrt{n}$ и посмотрим, в промежутке между какими целыми числами находится число $100 \cdot \sqrt{n}$. Утверждается, что все эти числа попадают в разные промежутки, потому что при $n > k$ $100(\sqrt{n} - \sqrt{k}) > 1$.

В самом деле, $100(\sqrt{n} - \sqrt{k}) = \frac{100}{\sqrt{n} + \sqrt{k}} > \frac{100}{2\sqrt{n}} > 1$, так как $n < 2024$

(на самом деле нам нужно более слабое условие $n < 2500$).

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если сказано, что все числа вида $100 \cdot \sqrt{n}$ лежат в различных промежутках, без доказательства — 4 балла.
- Если сказано, что для любых двух чисел a и b существует такое число m , что $m(\sqrt{a} - \sqrt{b}) > 1$, без доказательства — 1 балл.

2. На доске написаны 10 натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Андрей выписал количество делителей у $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ и получил десять подряд идущих чисел. Никита выписал количество общих делителей у a_1 и a_2 , у a_1 и a_3 , $\dots$, у a_9 и a_{10} (всего 45 таких пар) и получил 45 различных степеней двоек. Докажите, что кто-то из них ошибся.

Решение. Заметим, что ровно половина чисел a_i являются точными квадратами, т. к. у них нечётное число делителей. Но тогда их попарные НОДы (которых 10) также должны быть точными квадратами, и значит, десять попарных НОДов должны иметь нечётное число делителей. Но среди различных степеней двойки такое число максимум одно. Противоречие.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если сказано, что среди a_i ровно половина — точные квадраты — 2 балла.
- Если сказано, что количество общих делителей точных квадратов нечетно — 3 балла.
- Если сказано, что количество общих делителей пар точных квадратов нечетно, но не сказано, почему это противоречит условию — 1 балл.

3. В футбольном клубе 33 игрока, которые изначально незнакомы. Каждый день тренер разбивает их на три команды по 11 человек. Две команды играют между собой, а третья прохладается на скамейке запасных. От скуки те, кто на скамейке, знакомятся между собой (а тем, кто играет — некогда знакомиться). Могут ли все игроки перезнакомиться за 11 дней?

Ответ: не могут.

Решение. Давайте выдавать карточку каждому человеку каждый раз, когда он был запасным.

Допустим, что какой-то игрок сидел на скамейке запасных не более трёх раз. За эти разы он мог познакомиться не более с 30 людьми, а должен был с 32. Значит, каждый был запасным не менее четырёх раз, а тогда выдано не менее $4 \cdot 33 = 132$ карточек.

Допустим теперь, что 11 дней хватит на то, чтобы клуб перезнакомился. За 11 дней будет выдана всего 121 карточка, что противоречит предыдущему абзацу.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если доказано, что каждый игрок был на скамейке запасных не менее 4 раз, — 4 балла.
- Если решение неверное — 0 баллов.

4. На кривой $xy = 1$ ($x > 0, y > 0$) даны две точки A и B . Касательные к кривой в точках A и B пересекаются в точке F . Пусть M — середина отрезка AB , O — начало координат.

Докажите, что $\frac{MO \cdot MF}{MA \cdot MB}$ не зависит от точек A и B .

Решение 1. Сосчитаем в координатах. Нам даны точки $A(a, \frac{1}{a})$, $B(b, \frac{1}{b})$, $M(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2ab})$ (координаты M — среднее арифметическое координат A и B).

Напишем уравнение касательной в точке A : $y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$ ($-\frac{1}{a^2}$ — производная функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = a$). Или: $y = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$.

Аналогично касательная в B имеет уравнение $y = -\frac{x}{b^2} + \frac{2}{b}$.

Найдём координаты точки F .

$$\begin{aligned}-\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a} &= -\frac{x}{b^2} + \frac{2}{b}; \\ x \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) &= \frac{2}{b} - \frac{2}{a}; \\ \frac{x(a-b)(a+b)}{a^2b^2} &= \frac{2(a-b)}{a+b}; \\ x_F &= \frac{2ab}{a+b}.\end{aligned}$$

Отсюда $y_F = -\frac{2b}{a(a+b)} + \frac{2}{a} = \frac{2}{a+b}$.

Теперь считаем $(MO \cdot MF)^2$:

$$\begin{aligned}(MO \cdot MF)^2 &= \left(\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a+b)^2}{4a^2b^2} \right) \left(\left(\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} \right)^2 + \left(\frac{a+b}{2ab} - \frac{2}{a+b} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{(a+b)^2}{4} \left(1 + \frac{1}{a^2b^2} \right) \left(\left(\frac{(a-b)^2}{2(a+b)^2} \right)^2 + \left(\frac{(a-b)^2}{2ab(a+b)} \right)^2 \right) = \frac{(a-b)^4}{16} \left(1 + \frac{1}{a^2b^2} \right)^2.\end{aligned}$$

Докажем, что эта величина пропорциональна AB^4 (это равносильно исходной задаче, ибо $AM \cdot BM = \frac{1}{4}AB^2$).

$$AB^4 = \left((a-b)^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 \right)^2 = \left((a-b)^2 + \left(\frac{a-b}{ab} \right)^2 \right)^2 = (a-b)^4 \left(1 + \frac{1}{a^2b^2} \right)^2.$$

Утверждение доказано.

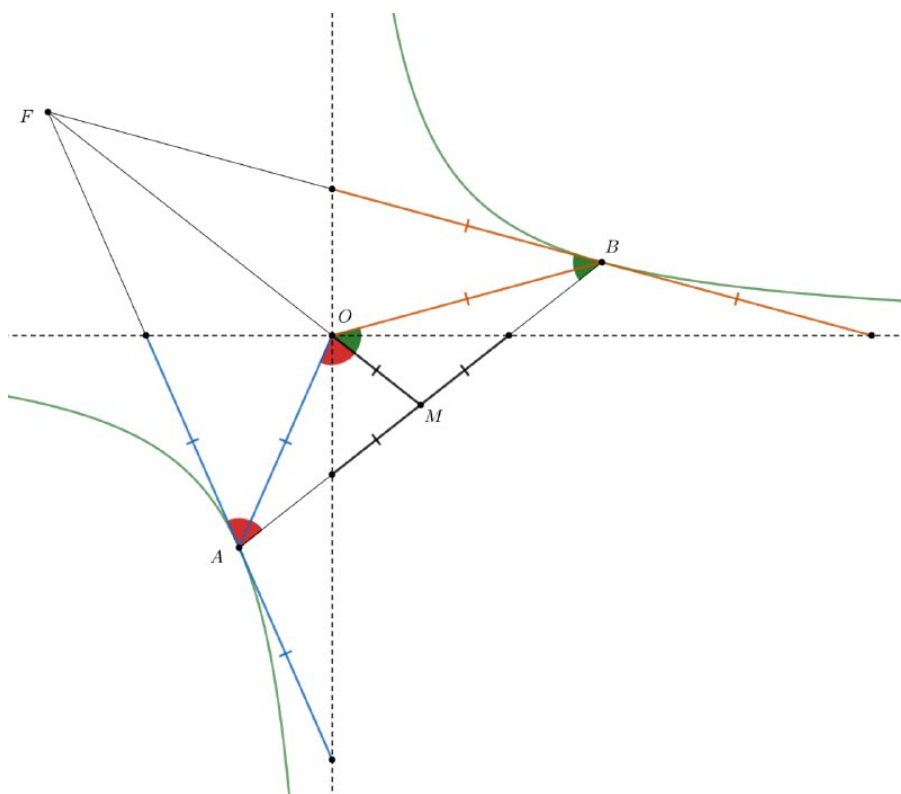


Рис. 1: К заданию 4

Решение 2. Приведем набросок более геометрического решения.

Лемма: координатные оси высекают на прямой AB отрезок с серединой в точке M . Доказательство: прямая AB задается уравнением $y = -\frac{x}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Поэтому AB пересекает оси в точках $(0, \frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ и $(a + b, 0)$, из чего сразу следует утверждение леммы.

Вернемся к задаче. Отметим точку F' на луче MO такую, что $MO \cdot MF' = MB^2$. Тогда, $\angle F'AM = \angle MOA$ и $\angle F'BM = \angle MOB$. Поэтому достаточно проверить аналогичные равенства углов с F вместо F' . Применяя лемму три раза, получим черные, синие и оранжевые равенства отрезков (пользуясь фактом, что в прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы). Дальше простой счет углов.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если счет в координатах не сошелся — 0 баллов.
- Если сформулирована лемма из решения 2 — 1 балл.
- Если лемма сформулирована и доказана — 3 балла.

5. Многочлен f таков, что уравнение $f(f(x)) \cdot f(x) = a$ имеет ровно три решения при любом натуральном a от 1 до 40. Докажите, что степень f не менее 6.

Решение. Пусть $\deg(f) = n$ (где $\deg$ — степень многочлена), и пусть $g(x) = f(f(x)) \cdot f(x)$. Тогда $\deg(g) = n^2 + n$, что всегда является чётным числом. Докажем, что уравнение $g(x) = a$ имеет нечётное число решений тогда и только тогда, когда прямая $y = a$ проходит через какую-нибудь точку экстремума (минимума или максимума) многочлена g . В самом деле, так как $\deg(g)$ чётна, то существует такое $N > 0$, что $g(x) > a$ при всех $|x| > N$. Значит, пересечений графика $y = g(x)$ с прямой $y = a$ на промежутках убывания g должно быть столько же, сколько и на промежутках возрастания. Но если общее количество таких точек пересечения нечётно, то хотя бы одна точка пересечения должна находиться на границе какого-то промежутка монотонности g , т. е. являться экстремумом.

Осталось заметить, что у многочлена степени k не может быть более $k - 1$ экстремума (например, потому что экстремум многочлена должен являться корнем производной, а она является многочленом степени $k - 1$), а значит, $n^2 + n - 1 \geq 40$, откуда и получаем $n \geq 6$.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если доказано, что прямая $y = a$ имеет нечетное число пересечений с графиком $g(x)$ только тогда, когда она проходит через экстремум — 4 балла.
- Если доказано, что многочлен степени k имеет не более $k - 1$ экстремума — 1 балл.